## স্নাতক পাঠক্রম ( B.D.P.)

**অনুশীলন পত্র ( Assignment) :** ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

# গণিত ( Mathematics )

*সহায়ক পাঠক্রম ( Subsidiary )*

**প্রথম পত্র** ( S-1 : SMT-I : **Mathematics-I** )

**পূর্ণমান ঃ ১০০** মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%

Full Marks : 100 Weightage of Marks : 30%

**পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।**

**Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.**

## বিভাগ - ক

[ পূর্ণমান : ২০ ]

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন । ১০ × ২ = ২০

১। ক) i) যদি $\tan(x - iy) = u - iv$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $u^2 + v^2 + 2u\cot 2x = 1$. ৫

ii) যদি $\tan\log(x + iy) = a + ib$, যেখানে $a^2 + b^2 \neq 1$, প্রমাণ করুন যে $\tan\log(x^2 + y^2) = \dfrac{2a}{1 - a^2 - b^2}$. ৫



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



খ) i) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1$-কে ( $x - 2$ )-এর ঘাত দ্বারা প্রকাশ করুন। ৫

ii) যদি $\omega$ ,1-এর ঘনমূল হয় দেখান যে $(a + b\omega + c\omega^2)$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের উৎপাদক এবং প্রদত্ত নির্ণায়কের মান $-(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$. ৫

গ) i) নীচের সম্পর্কটি তুল্যতা সম্পর্ক কিনা পরীক্ষা করুন। $a\rho b$ যদি $(a + b)$, 2-এর গুণিতক হয়, যেখানে $a, b \in z$ ( $z$ : সকল পূর্ণ সংখ্যার সঞ্চয়ন )। ৫

ii) দেখান যে সকল মূলদ সংখ্যার সেট $Q$ যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে (additive) একটি আবেলীয় গ্রুপ। ৫

ঘ) i) $S$ = ( 1, 2, 3 ) সেটের বিন্যাসগুলি নির্ণয় করুন। ৫

ii) প্রমাণ করুন যে সকল জোড় সংখ্যার সেট সাধারণ যোগ সাপেক্ষে ও গুণ সাপেক্ষে একটি বিনিময়ী রিং। ৫

## বিভাগ - খ

[ পূর্ণমান : ১৮ ]

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ৬ × ৩ = ১৮

২। i) দেখান যে $e^i$-এর সকল মান বাস্তব এবং গুণোত্তর প্রগতিতে আছে। ৬

ii) একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণটির বীজগুলির বর্গ। ৬

iii) $k$-এর কোন্ মানের জন্য $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিশিষ্ট (singular) হবে ? ৬

iv) যদি $ax + by + cz = 1$, $bx + cy + az = 0$, $cx + ay + bz = 0$ হয়, তাহলে দেখান যে নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$-এর অন্যোন্যক (reciprocal) নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ । ৬

v) একটি চিত্রণ $f : N \to N$ এইভাবে সংজ্ঞায়িত হল : $f(n) = n + 2$, $n \in N$ ( $N$ সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট )। দেখান যে একটি একৈকী (one to one) চিত্রণ, কিন্তু উপরি (onto) চিত্রণ নয়। ৬



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



vi) মনে করুন ( $G$, $o$ ) একটি দল। $G$-এর যে কোন উপাদান $a$, $b$-এর জন্য প্রমাণ করুন যে (i) $(a^{-1})^{-1} = a$ এবং (ii) $(a o b)^{-1} = b^{-1} o a^{-1}$ । ৬

## বিভাগ - গ

[ পূর্ণমান : ১২ ]

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ৩ × ৪ = ১২

৩। i) প্রমাণ করুন যে কোন দলের দুটি উপদলের ছেদও ঐ দলের একটি উপদল। ৩

ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির যথার্থ মান নির্ণয় করুন। ৩

iii) যদি $x^3 - 3x^2 + kx + 3 = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে $k$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

iv) দেখান যে প্রত্যেক ত্রি-মাত্রিক বিপ্রতিসম নির্ণায়কের মান শূন্য। ৩

v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা নির্ণয় করুন। ৩

vi) যদি $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{4,5,6\}$ হয়, দেখান যে $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. ৩

vii) $a, b \in G$, যেখানে $G$ একটি গ্রুপ। দেখান যে $b^{-1}a^{-2}b = (b^{-1}ab)^{-2}$. ৩

viii) $\cos(\alpha + i\beta)$-কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ করুন। ৩

## বিভাগ - ঘ

[ পূর্ণমান : ৫০ ]

৪। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

ক) i) দেখান যে মূলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখা $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ -এর লম্ব যুগ্ম সরলরেখা হল $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$. ৫

ii) প্রমাণ করুন যে

$x^2 - 4xy + 4y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$ কণিকটি একটি অধিবৃত্ত। ৫

খ) i) বহিঃস্থ $(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৫

ii) যদি $PSP'$ এবং $QSQ'$ $S$ ফোকাস বিশিষ্ট একটি কণিকের দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত নাভিগামী জ্যা হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'}$ একটি ধ্রুবক। ৫

গ) i) প্রমাণ করুন যে দুটি সরলরেখার দিক্‌নির্দেশক কোসাইন $l, m, n$ যদি দুটি সমীকরণ $al + bm + cn = 0$ এবং $fmn + gnl + hlm = 0$ দ্বারা সম্পর্কযুক্ত হয়, তাহলে সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে যখন $\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$. ৫



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



ii) প্রমাণ করুন যে

$2(x^2 + y^2 + z^2) + 8x - 13y + 17z + 17 = 0$,

$2x + y - 3z + 1 = 0$ বৃত্তটি এবং

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4y + 3z = 0$,

$x - y + 2z - 4 = 0$ বৃত্তটি একই গোলকের উপর অবস্থিত এবং ঐ গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৫

ঘ) i) যদি $ABC$ ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি $G$ বিন্দুতে ছেদ করে, দেখান যে $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. ৫

ii) $ABC$ ত্রিভুজের $BC$ বাহুর মধ্যবিন্দু $D$ হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$. ৫

৫। যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

i) $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ এবং $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার মেরু সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

ii) প্রমাণ করুন যে $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y = 5$ সমীকরণটি দুটি সমান্তরাল সরলরেখা সূচিত করে এবং তাদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করুন। ৬

iii) একটি কণিকের জ্যা-র মেরু সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

iv) একটি পরিবর্তনশীল সমতল অক্ষত্রয়কে $A, B, C$ বিন্দুতে ছেদ করে। $\Delta ABC$ মূলবিন্দু থেকে $3p$ একক দূরে আছে। $\Delta ABC$-এর ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন। ৬

v) যে কোন ত্রিভুজ $\Delta ABC$-এর $D, E, F$ যথাক্রমে $BC$, $CA$ এবং $AB$ বাহুগুলির মধ্যবিন্দু। $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ -কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ -এর সমবায়ে নির্ণয় করুন। ৬

vi) প্রমাণ করুন যে $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ এবং $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। ৬

৬। যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

i) অক্ষদ্বয়কে $45°$ কোণে আবর্তিত করলে $x^2 - y^2 = 2a^2$ সমীকরণের পরিবর্তিত রূপটি নির্ণয় করুন। ৩

ii) দেখান যে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সাপেক্ষে $y^2 = 4bx$ অধিবৃত্তের মেরুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হল একটি অধিবৃত্ত যার সমীকরণ হয় $y^2 = \frac{4b^2}{a^2}x$. ৩





iii) $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y + 9 = 0$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। ৩

iv) প্রমাণ করুন যে $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ এবং $4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$ সরলরেখা দুটি সমতলীয়। ৩

v) একটি লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে, অক্ষ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ সরলরেখা এবং অর্ধশীর্ষকোণ $60°$ হলে শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৩

vi) $(2, 1, 4)$ বিন্দুগামী ও $9x - 7y + 6z + 48 = 0$, $x + y - z = 0$ এই দুটি সমতলের উপর লম্ব একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৩

vii) মনে করুন $ABCDEF$ একটি সুষম ষড়ভুজ। দেখান যে $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FA} = 4\overrightarrow{AB}$. ৩

viii) যদি $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{\gamma} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ হয় তাহলে $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

**English Version**

**Group – A**

[ Full Marks : 20 ]

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) i) If $\tan(x - iy) = u - iv$ then prove that $u^2 + v^2 + 2u\cot 2x = 1$. 5

ii) If $\tan\log(x + iy) = a + ib$, where $a^2 + b^2 \neq 1$, prove that $\tan\log(x^2 + y^2) = \dfrac{2a}{1 - a^2 - b^2}$. 5

b) i) Express $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ as a polynomial in $(x - 2)$. 5

ii) If $\omega$ is a cube root of unity, show that $(a + b\omega + c\omega^2)$ is a factor of the determinant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ and the value of this determinant is $-(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$. 5

c) i) Examine whether the binary relation $a\rho b$ if $(a + b)$ is the multiple of 2 where $a, b \in z$ ( $z$ : set of all integers ) is an equivalence relation. 5





ii) Show that the set of all rational numbers $Q$ is an Abelian group with respect to usual addition. 5

d) i) Find all the permutations of the set $S = (1, 2, 3)$. 5

ii) Prove that the set of all even integers with respect to usual addition and multiplication is a commutative ring. 5

**Group – B**

[ Full Marks : 18 ]

Answer any *three* questions. $6 \times 3 = 18$

2. i) Show that all the values of $e^i$ are real and are in geometric progression. 6

ii) Find out an equation whose roots are the squares of the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. 6

iii) For what value of $k$ the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k \end{bmatrix}$ will be singular ? 6

iv) If $ax + by + cz = 1$, $bx + cy + az = 0$ and $cx + ay + bz = 0$, then show that the reciprocal of the determinant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ is the determinant $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$. 6

v) Show that the mapping $f : N \to N$ ( $N$ being the set of all natural numbers) defined by $f(n) = n + 2$, $n \in N$ is one to one but not onto. 6

vi) Let ( $G$, $o$ ) be a group. Then for $a, b \in G$, prove that (i) $(a^{-1})^{-1} = a$, (ii) $(a o b)^{-1} = b^{-1} o a^{-1}$. 6

**Group – C**

[ Full Marks : 12 ]

Answer any *four* questions. $3 \times 4 = 12$

3. i) Prove that the intersection of two subgroups of a group is again a subgroup of that group. 3

ii) Find the eigenvalues of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. 3

iii) If the roots of the equation $x^3 - 3x^2 + kx + 3 = 0$ are in A.P., find the value of $k$. 3

iv) Show that every skew-symmetric determinant of order three is zero. 3

v) Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$. 3





vi) If $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ and $C = \{4, 5, 6\}$ show that $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. 3

vii) $a, b \in G$, where $G$ is a group. Show that $b^{-1}a^{-2}b = (b^{-1}ab)^{-2}$. 3

viii) Express $\cos(\alpha + i\beta)$ in the form $A + iB$. 3

**Group – D**

[ Full Marks : 50 ]

4. Answer any *two* questions : $10 \times 2 = 20$

a) i) Show that the equation to the pair of straight lines through the origin perpendicular to the pair of straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$. 5

ii) Prove that the conic $x^2 - 4xy + 4y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$ represents a parabola. 5

b) i) Find the equation of the pair of tangents from an external point $(x_1, y_1)$ to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 5

ii) If $PSP'$ and $QSQ'$ be two perpendicular focal chords of a conic with focus $S$, then prove that $\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'}$ is constant. 5

c) i) Prove that the pair of straight lines whose direction cosines are given by

$al + bm + cn = 0$ and

$fmn + gnl + hlm = 0$ will be

perpendicular to each other when

$\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$. 5

ii) Prove that the circles

$2(x^2 + y^2 + z^2) + 8x - 13y + 17z + 17 = 0$

$2x + y - 3z + 1 = 0$ and

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4y + 3z = 0$

$x - y + 2z - 4 = 0$ lie on the same sphere.

Find its equation. 5

d) i) If three medians of a triangle *ABC* intersect at *G*, show that

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. 5

ii) Using vector method prove that if *D* be the midpoint of the side *BC* of a triangle *ABC*, then

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$. 5



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



5. Answer any *three* questions : $6 \times 3 = 18$

i) Find the polar equation of the straight line joining the two points $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ and $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$. 6

ii) Prove that the equation

$x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y = 5$ represents a pair of parallel straight lines and find the distance between them. 6

iii) Find the polar equation of a chord of a conic. 6

iv) A variable plane which is at a constant distance $3p$ from the origin cuts the axes in *A, B, C*. Find the locus of the centroid of the triangle *ABC*. 6

v) In a triangle *ABC, D, E, F* are the midpoints of *BC, CA* and *AB*. Express $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ and $\overrightarrow{CF}$ as a linear combination of $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$. 6

vi) Prove that the three vectors $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ and $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ form a right angled triangle. 6

6. Answer any *four* questions : $3 \times 4 = 12$

i) Transform the equation $x^2 - y^2 = 2a^2$ to axes inclined at 45° to the original axes. 3

ii) Show that the locus of the poles of tangents to the parabola $y^2 = 4ax$ with respect to the parabola $y^2 = 4bx$ is the parabola $y^2 = \frac{4b^2}{a^2}x$. 3

iii) Discuss the nature of the conic $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y + 9 = 0$. 3

iv) Prove that the two straight lines

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ and

$4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$ are coplanar. 3

v) Find the equation of a right circular cone with vertex at the origin, semivertical angle 60° and axis $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. 3

vi) Find the equation of the plane which passes through the point ( 2, 1, 4 ) and is perpendicular to each of the planes $9x - 7y + 6z + 48 = 0$ and $x + y - z = 0$. 3





vii) Let *ABCDEF* be a regular hexagon. Show that $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FA} = 4\overrightarrow{AB}$. 3

viii) If $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{\gamma} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$. Find the value of $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$. 3

---

| | | |
|---|---|---|
| Date of Publication | : | 10.10.2014 |
| Last date of Submission of Answer Script by the student | : | 30.11.2014 |
| Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before | : | 12.01.2015 |