স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

সহায়ক পাঠক্রম (Subsidiary)

দ্বিতীয় পত্র (S-2 : SMT-II : **Mathematics-II**)

পূর্ণমান ঃ ১০০ মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%

Full Marks : 100 Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক

(পূর্ণমান : ৪০)

১। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ২০ × ১ = ২০

(ক) i) প্রদত্ত অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে সন্ততা পরীক্ষা করুন : ৫

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ii) দেখান যে $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, যেখানে $\mathbb{N}$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট। ৪

iii) সমাধান করুন : $4\{x\} = x + [x]$, যেখানে $\{x\}$ এবং $[x]$ যথাক্রমে x-এর ভগ্নাংশ (fractional part) এবং পূর্ণ অংশ (integral part) কে সূচিত করে। ৪

iv) $y = x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ হলে দেখান যে

$$y_n = (-1)^n (n-2)!\left[\frac{x-n}{(x-1)^n} - \frac{x+n}{(x+1)^n}\right].$$ ৬

v) π ও $\frac{22}{7}$ -এর কোন্‌টি অমূলদ ও কেন ? ১

(খ) i) যদি

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{2}a\sin x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 2x\cot x + b, & \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ a\cos 2x - b\sin x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

অন্তরাল $0 \le x \le \pi$ -এর সকল মানের জন্য সন্তত হয়, তাহলে a ও b-এর মান নির্ণয় করুন। ৬

ii) শ্রেণীগুলির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন :

x) $2x+\frac{3}{8}x^2+\frac{4}{27}x^3+\ldots+\frac{(n+1)x^n}{n^3}+\ldots$

y) $\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}+\ldots$

৩ + ৩

iii) যদি $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ তিনটি অভিসারী অনুক্রম এবং যদি $x_n < y_n < z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ যাতে $\lim_{x\to\infty} x_n = l = \lim_{x\to\infty} z_n$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $\lim_{n\to\infty} y_n = l$. ৪

iv) যদি $U = \frac{Lx+M}{x^2-2Bx+C}$, যেখানে $B, C, L, M \in \mathbb{R}$, তবে U_4, U_3, U_2-এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন, যেখানে $U_r = \frac{\mathrm{d}^r U}{\mathrm{d}x^r}$. ৪

২। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ২০ × ১ = ২০

(ক) i) যদি $I_n = \int \mathrm{cosec}^n x\,\mathrm{d}x$ হয় তাহলে দেখান যে $I_n = \frac{\mathrm{cosec}^{n-2}x\cot x}{-(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) I_{n-2}$, $n(>1) \in \mathbb{N}$ এবং এখান থেকে I_6-এর মান নির্ণয় করুন। ৪ + ৩

ii) মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x+a^2}$ ৫

iii) $x^2+y^2=2ax, y^2=ax$ বক্রের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। ৪

iv) $f(x)$ নির্ণয় করুন যেখানে $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\tan x}{1+2\tan^2 x}$, এবং $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} + \log\sqrt{2}$. ৪

(খ) i) সমাধান করুন :

$p = \sin(y - px)$, যেখানে $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. ৪

ii) মান নির্ণয় করুন :

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{6}{n}} + \ldots + e^{\frac{2n}{n}}\right]$. ৫

iii) $\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$-এর মান নির্ণয় করুন। ৫

iv) $\iint_E \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$-এর মান নির্ণয় করুন যখন E ক্ষেত্রটি $x^2+y^2=2ax$ বৃত্তের উপরিভাগকে সূচিত করে। ৬

বিভাগ – খ

(পূর্ণমান : ৩৬)

৩। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১৮ × ১ = ১৮

(ক) i) Rolle's theorem বিবৃত ও প্রমাণ করুন। শর্তগুলি পর্যাপ্ত (sufficient) না আবশ্যিক (necessary) উদাহরণসহযোগে যথার্থতা ব্যাখ্যা করুন। ৫ + ৩

ii) যদি $y = \sin mx$ হয়, তবে

$$\begin{vmatrix} y & \frac{dy}{dx} & \frac{d^2y}{dx^2} \\ \frac{d^3y}{dx^3} & \frac{d^4y}{dx^4} & \frac{d^5y}{dx^5} \\ \frac{d^6y}{dx^6} & \frac{d^7y}{dx^7} & \frac{d^8y}{dx^8} \end{vmatrix}$$

-এর মান নির্ণয় করুন। ৫

iii) যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ হয়, দেখান যে, $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 3/(x+y+z)^2$. ৫

(খ) i) $r = a(1 - \cos\theta)$-এর বক্রতা ব্যাসার্ধ (r, θ) বিন্দুতে $\sqrt{r}$ -এর সমানুপাতিক দেখান। ৬

ii) যদি (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক $x^3 + y^3 = a^3$ কণিককে পুনরায় (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখান যে $\frac{x_2}{x_1} + \frac{y_2}{y_1} = -1$. ৬

iii) প্রমাণ করুন যে বৃত্তের মধ্যে অঙ্কিত বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র। ৬

৪। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১৮ × ১ = ১৮

(ক) i) $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ বক্রের একটি আর্চের ভূমির চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘনের আয়তন নির্ণয় করুন। ৬

ii) $x^2 + y^2 = c^2$ এই সমকেন্দ্রিক বৃত্তগোষ্ঠীর সঙ্গে 45° কোণে ছেদকারী প্রক্ষেপ পথগোষ্ঠী নির্ণয় করুন। ৬

iii) সমাধান করুন :

$$(x+a)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+a)\frac{dy}{dx} + 6y = x$$ ৬

(খ) i) যদি $u(x, y) = \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ হয়, তবে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$-এর মান নির্ণয় করুন। ৫

ii) $(1+x)^m$ -এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন। ৫

iii) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$ -এর ক্ষেত্রে দেখান যে $(1+x^2)y_{n+2}+x(2n+1)y_n+(n^2-m^2)y_n=0$. এখান থেকে $y_n(0)$-এর মান নির্ণয় করুন।

৫ + ৩

বিভাগ – গ

(পূর্ণমান : ২৪)

৫। যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

i) Cauchy's root test -এর সাহায্যে $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$ -এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন। ৩

ii) কোশির সাধারণ সূত্র-এর সাহায্যে প্রমাণ করুন $\left\{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right\}$ একটি অভিসারী অনুক্রম। ৩

iii) দেখান যে কোন মূলদ সংখ্যার অস্তিত্ব নেই যার ত্রিঘাত হবে 7. ৩

iv) যদি অনুক্রম $\{x_n\}$, l অভিমুখে অভিসারী হয়, দেখান যে $y_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\to l$ হবে যখন $n\to\infty$. ৩

v) $r^n=a^n\cos n\theta$ হলে দেখান যে, $a^{2n}\frac{d^2r}{ds^2}+nr^{2n-1}=0$. ৩

vi) দেখান যে $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $a>0$ বক্ররেখায় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ে স্পর্শকের দ্বারা ছেদিতাংশ ধ্রুবক। ৩

vii) 18 কে এমন দুটি অংশে ভাগ করুন যাতে একটি অংশের বর্গ ও অপর অংশের ত্রিঘাতের গুণফল সর্বোচ্চ হয়। ৩

viii) কোন্ কোন্ অন্তরালে $f(x)=x^3-3x^2-9x+14$ অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান হবে ? ৩

৬। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

i) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x-3}dx$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

ii) $\int_0^\infty\frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}dx$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

iii) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ -এর intrinsic সমীকরণ নির্ণয় করুন যখন $x=a$ বিন্দুটি স্থির। ৩

iv) দেখান যে $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\theta}{n}+\sin\frac{2\theta}{n}+\ldots\sin\frac{(n-1)\theta}{n}\right)=\frac{1-\cos\theta}{\theta}$ ৩

৭। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

i) সমাধান করুন :

$(y^4 + 2y)\mathrm{d}x + (xy^3 + 2y^4 - 4x)\mathrm{d}y = 0$. ৩

ii) দেখান যে a ব্যাসার্ধের সকল বৃত্তরাজির অবকল সমীকরণ $\left\{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right\}^3 = a^2\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2$. ৩

iii) সমাধান করুন : $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 4y = \cos 2x$. ৩

iv) সমাধান করুন : $y = 2px + y^2p^3$. ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

English Version

Group – A

(Marks : 40)

1. Answer either **(a)** or **(b)** : 20 × 1 = 20

a) i) Test the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

at the point $x = 0$. 5

ii) Show that $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ being the set of natural numbers. 4

iii) Solve : $4\{x\} = x + [x]$, where $\{x\}$ and $[x]$ are fractional part and integral part of x. 4

iv) If $y = x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, then show that $y_n = (-1)^n (n-2)!\left[\frac{x-n}{(x-1)^n} - \frac{x+n}{(x+1)^n}\right]$. 6

v) Which one between π and $\frac{22}{7}$ is irrational and why ? 1

b) i) Find the values of a and b if

$$f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{2}a\sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{4} \\ 2x\cot x+b, & \frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2} \\ a\cos 2x-b\sin x, & \frac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$$

is continuous at every point in $0\le x\le \pi$. 6

ii) Test the convergence of the following series :

x) $2x+\frac{3}{8}x^2+\frac{4}{27}x^3+\ldots+\frac{(n+1)x^n}{n^3}+\ldots$

y) $\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}+\ldots$

3 + 3

iii) If $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ are three convergent sequences and if $x_n < y_n < z_n, \forall n \in \mathbb{N}$ such that $\lim_{x\to\infty} x_n = l = \lim_{x\to\infty} z_n$, then prove that $\lim_{n\to\infty} y_n = l$. 4

iv) If $U=\frac{Lx+M}{x^2-2Bx+C}$, where $B, C, L, M \in \mathbb{R}$; then find the relation among U_4, U_3, U_2, where $U_r=\frac{d^rU}{dx^r}$. 4

2. Answer either **(a)** or **(b)** : 20 × 1 = 20

a) i) If $I_n=\int \text{cosec}^n x\,dx$, then show that

$$I_n=\frac{\text{cosec}^{n-2}x\cot x}{-(n-1)}+\left(\frac{n-2}{n-1}\right)I_{n-2},$$

$n(>1)\in\mathbb{N}$. Hence find the value of I_6.

4 + 3

ii) Evaluate : $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}$ 5

iii) Find the area between the curves $x^2+y^2=2ax$ and $y^2=ax$. 4

iv) Find $f(x)$, where $\frac{df(x)}{dx}=\frac{\tan x}{1+2\tan^2 x}$, and $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}+\log\sqrt{2}$. 4

b) i) Solve $p=\sin(y-px)$, where $p=\frac{dy}{dx}$. 4

ii) Evaluate :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{4}{n}}+e^{\frac{6}{n}}+\ldots+e^{\frac{2n}{n}}\right].$$ 5

iii) Evaluate : $\int\sqrt{\tan x}\,dx$. 5

iv) Evaluate $\iint_E\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$ where E indicates the upper part of the circle $x^2+y^2=2ax$. 6

Group – B

(Marks : 36)

3. Answer either **(a)** or **(b)** : 18 × 1 = 18

a) i) State and prove Rolle's theorem. Are the conditions sufficient or necessary ? Justify with examples. 5 + 3

ii) If $y = \sin mx$, then find the value of

$$\begin{vmatrix} y & \frac{dy}{dx} & \frac{d^2y}{dx^2} \\ \frac{d^3y}{dx^3} & \frac{d^4y}{dx^4} & \frac{d^5y}{dx^5} \\ \frac{d^6y}{dx^6} & \frac{d^7y}{dx^7} & \frac{d^8y}{dx^8} \end{vmatrix}$$

5

iii) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then show that

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 3/(x+y+z)^2$. 5

b) i) Show that the radius of curvature at (r, θ) to the curve $r = a(1 - \cos\theta)$ is proportional to $\sqrt{r}$. 6

ii) If the tangent at (x_1, y_1) to the conic $x^3 + y^3 = a^3$ again meet it at (x_2, y_2) then show that $\frac{x_2}{x_1} + \frac{y_2}{y_1} = -1$. 6

iii) Prove that maximum area of a rectangle inscribed in a circle is a square. 6

4. Answer either **(a)** or **(b)** : 18 × 1 = 18

a) i) Find the volume of the surface of revolution of an arc of conic $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ about the base. 6

ii) Find the 45° trajectory of the concentric circles $x^2 + y^2 = c^2$. 6

iii) Solve :

$(x+a)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+a)\frac{dy}{dx} + 6y = x$. 6

b) i) If $u(x,y) = \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ then find the value of $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 5

ii) Expand $(1+x)^m$. 5

iii) For $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$, show that

$(1+x^2)y_{n+2} + x(2n+1)y_n + (n^2 - m^2)y_n = 0$.

Hence find the value of $y_n(0)$. 5 + 3

Group – C
(Marks : 24)

5. Answer any *four* questions : 3 × 4 = 12

i) Test the convergence of $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$ by Cauchy's root test. 3

ii) By Cauchy's general principle of convergence show that $\left\{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right\}$ is a convergent sequence. 3

iii) Show that there does not exist any rational number whose cube is 7. 3

iv) If the sequence $\{x_n\}$ converses to l, show that $y_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\to l$ as $n\to\infty$. 3

v) If $r^n=a^n\cos n\theta$, then show that $a^{2n}\frac{d^2r}{ds^2}+nr^{2n-1}=0$. 3

vi) Show that the tangent intercepts by the axes to the curve $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $a>0$, is constant. 3

vii) Divide 18 into two parts such that the product of square of one part and cube of second part is maximum. 3

viii) Find the intervals in which the function $f(x)=x^3-3x^2-9x+14$ is monotonic increasing or decreasing. 3

6. Answer any *two* questions : 3 × 2 = 6

i) Evaluate : $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x-3}dx$. 3

ii) Evaluate : $\int_0^\infty\frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}dx$. 3

iii) Find the intrinsic equation of the conic, $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, when the point $x=a$ is fixed. 3

iv) Show that $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\theta}{n}+\sin\frac{2\theta}{n}+\ldots\sin\frac{(n-1)\theta}{n}\right)=\frac{1-\cos\theta}{\theta}$ 3

7. Answer any *two* questions : 3 × 2 = 6

i) Solve : $(y^4+2y)dx+(xy^3+2y^4-4x)dy=0$. 3

ii) Show that the differential equation of the family of circles of radius a is $\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$. 3

iii) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\cos 2x$. 3

iv) Solve : $y=2px+y^2p^3$. 3

Date of Publication : 10.10.2014

Last date of Submission of Answer Script by the student : 30.11.2014

Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before : 12.01.2015