স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

পঞ্চদশ পত্র (15th Paper : **Complex Analysis & Laplace Transformation**)

পূর্ণমান ঃ ৫০ — মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%

Full Marks : 50 — Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ - ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ১০ × ২ = ২০

১। (ক) সমাধান করুন : $|z|-z=1+2i$, যেখানে $z=x+iy$ (x, y বাস্তব)। ৫

(খ) $f(t)\begin{cases}=0, & 0<t<3\\ =t-1, & t\geq 3\end{cases}$

হলে ল্যাপ্লাস রূপান্তর $L\{f(t)\}$ নির্ণয় করুন। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

২। (ক) x বাস্তব মানের হলে যদি $x=\operatorname{Log}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ হয়, তবে দেখান যে $\theta=-i\operatorname{Log}\tan\left(\frac{\pi}{4}+i\frac{x}{2}\right)$. ৫

(খ) ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি নির্ণয় করুন : ৫

$$\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$$

৩। (ক) যদি $f(z)\begin{cases}=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ =0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

হয়, তবে দেখান যে $z=0$ বিন্দুতে কোশী-রীমান সমীকরণ সিদ্ধ হয়, যদিও $f'(0)$-এর কোনো অস্তিত্ব নেই। ৬

(খ) ল্যাপ্লাস রূপান্তর-এর কনভলিউশন উপপাদ্যের সাহায্যে নিম্নলিখিত ল্যাপ্লাস বিলোম রূপান্তরের মান নির্ণয় করুন : ৪

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$$

৪। (ক) একটি বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক $f(z)=u+iv$ নির্ণয় করুন যেখানে $u(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$. ৫

(খ) ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান করুন : ৫

$y''(t)+4y(t)=9t, y(0)=0, y'(0)=7$

বিভাগ - খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ৬ × ৩ = ১৮

৫। যখন $\tan^{-1}(x+iy)=u+iv$ যেখানে x, y, u, v বাস্তব, দেখান যে (i) $x^2+y^2+2x\cot 2u=1$ এবং (ii) $x^2+y^2+1=2y\coth 2v$.

৬। $f(z)$ একটি বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক হলে প্রমাণ করুন যে $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|Rl\,f(z)|^2=2|f'(z)|^2$.

৭। দেখান যে যদি একটি দ্বি-রৈখিক রূপান্তর T-এর দ্বারা $z_1=2,\ z_2=i,\ z_3=-2$ যথাক্রমে $w_1=1,\ w_2=i$ এবং $w_3=-1$ তে রূপান্তরিত হয় তখন T-এর আকারটি হবে $w=\frac{3z+2i}{6+iz}$.

৮। নিম্নলিখিত সমাকলটির মান ল্যাপ্লাস রূপান্তরের সাহায্যে নির্ণয় করুন : $\int_0^t \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

৯। $L\{f(t)\}=\overline{f}(s)$ হলে দেখান যে

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\overline{f}(s),\ n=1, 2, 3, \ldots .$$

১০। ল্যাপ্লাস রূপান্তরের প্রাথমিক চলন ধর্ম বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

বিভাগ - গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ৩ × ৪ = ১২

১১। দেখান যে সম্প্রসারিত Z-তলে চারটি বিন্দুর দ্বৈত অনুপাত প্রদত্ত একটি দ্বি-রৈখিক রূপান্তর $w=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$ -এর অধীনে অবিচল থাকে।

১২। সম্প্রসারিত Z-তলে $w=\frac{az+b}{cz+d}, ad-bc\neq 0$ দ্বি-রৈখিক রূপান্তরের বিপরীত রূপান্তর নির্ণয় করুন।

১৩। $\frac{(1+i)x-2i}{3+i}+\frac{(2-3i)y+i}{3-i}=i$ হলে x এবং y-এর মান নির্ণয় করুন।

১৪। দেখান যে আরগঁ সমতলে $\cos z$ অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক নয়।

১৫। $u(x,y)=2e^x\cos y$ অপেক্ষকটি হরাত্মক অপেক্ষক কিনা বিচার করুন।

১৬। $L\{f(t)\}=\overline{f}(s)$ হলে দেখান যে

$$L\left\{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right\}=\frac{1}{s}\overline{f}(s) .$$

১৭। $e^{-t}(2\cos 3t-\sin 3t)$ অপেক্ষকটির ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় করুন।

১৮। দেখান যে $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{3}\sin 3t$.

English Version

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. (a) Solve $|z| - z = 1 + 2i$, where $z = x + iy$, x & y being real. 5

(b) Find Laplace transform $L\{f(t)\}$ where

$$f(t) \begin{cases} = 0, & 0 < t < 3 \\ = t - 1, & t \geq 3. \end{cases}$$ 5

2. (a) If $x = \operatorname{Log}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ where x is real, then show that $\theta = -i \operatorname{Log}\tan\left(\frac{\pi}{4} + i\frac{x}{2}\right)$. 5

(b) Using inverse Laplace transform find the following function : 5

$$\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$$

3. (a) If $f(z) \begin{cases} = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ = 0, (x, y) = (0,0) \end{cases}$

then show the Cauchy-Riemann equations are satisfied at $z = 0$ though $f'(0)$ does not exist. 6

(b) Using convolution theorem of Laplace transform find the following : 4

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$$

4. (a) Find an analytic function $f(z) = u + iv$ where $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$. 5

(b) Solve the following by Laplace transformation : 5

$y''(t) + 4y(t) = 9t, y(0) = 0, y'(0) = 7$

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. If $\tan^{-1}(x + iy) = u + iv$ where x, y, u, v are real, show that (i) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2u = 1$ and (ii) $x^2 + y^2 + 1 = 2y \coth 2v$.

6. If $f(z)$ is an analytic function then show that $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + |Rl\, f(z)|^2 = 2|f'(z)|^2$.

7. Show that if a bilinear transformation transforms the points $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$ into the points $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$ respectively by T then the mapping of T is of the form $w = \frac{3z + 2i}{6 + iz}$.

8. Evaluate the following integral by Laplace transformation : $\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$.

9. If $L\{f(t)\} = \overline{f}(s)$, then show that $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\overline{f}(s)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

10. State and prove first shifting property of a Laplace transformation.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Show that under a bilinear transformation $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, the cross ratio of any four points of the extended *Z*-plane remains the same.

12. Find the inverse transformation of the bilinear transformation $w = \dfrac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$ in the extended *Z*-plane.

13. Find the values of x and y if $\dfrac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \dfrac{(2-3i)y + i}{3-i} = i$.

14. Show that in Argand plane the function $\cos z$ is not bounded.

15. Verify whether the function $u(x, y) = 2e^x \cos y$ is harmonic or not.

16. If $L\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ then show that $L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \dfrac{1}{s}\overline{f}(s)$.

17. Find the Laplace transformation of the function $e^{-t}(2\cos 3t - \sin 3t)$.

18. Show that $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+9}\right\} = \dfrac{1}{3}\sin 3t$.

Date of Publication	:	10.10.2014
Last date of Submission of Answer Script by the student	:	30.11.2014
Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before	:	12.01.2015