স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

দ্বাদশ পত্র (12th Paper : **Probability Theory**)

পূর্ণমান ঃ ৫০ মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%

Full Marks : 50 Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) একটি পাত্রে 1, 2, ..., n নম্বরযুক্ত n-টি টিকিট আছে যার থেকে r-টি পরপর টানা এবং প্রতিবার ফেরত দেওয়া হল। টানা টিকিটের বৃহত্তম নম্বর i হওয়ার সম্ভাবনা কত ? ৫

(খ) একটি যদৃচ্ছ চল X , –1, 0, 1 এই মানগুলি নিতে পারে যথাক্রমে $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ সম্ভাবনার সঙ্গে। নিবেশনটি নির্ণয় করুন। ৫

২। (ক) একটি চলক X -এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x) = \frac{1}{40} e^{-\frac{x}{40}}, \quad x > 0$$

$$= 0, \text{ অন্যত্র।}$$

এক্ষেত্রে মান নির্ণয় করুন

(i) $P(X \le 15)$, (ii) $P(40 < X \le 50)$. ৫

(খ) যদি X একটি দ্বিপদ (n, p) চলক হয়, তবে $Y = aX + b$ চলকের নিবেশন নির্ণয় করুন। ৫

৩। (ক) স্বাভাবিক নিবেশনের ক্ষেত্রে দেখান যে ৫

$$\mu_{2k+1} = 0, \ \mu_{2k} = 1.3.5\ldots(2k-1)\sigma^{2k}.$$

(খ) যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, তবে দেখান যে ৫

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = P(a < X \le b) P(c < Y \le d).$$

৪। (ক) যদি X, Y দুটি অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক হয়, তাহলে X^2Y^2 -এর গড়মান বের করুন। ৫

(খ) যদি $a_1, a_2 \ne 0$ এবং b_1, b_2 ধ্রুবক হয়, তাহলে দেখান যে

$$\rho(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = \frac{a_1a_2}{|a_1||a_2|}\rho(X, Y).$$ ৫

বিভাগ – খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। দুজন খেলোয়াড় A ও B পরপর একটি ছক্কা ফেলতে থাকে। প্রথমে যার ছয় পড়বে, সেই জিতবে। পুরস্কার হল 99 টাকা। যদি A প্রথমে ছক্কা ফেলে তবে তার প্রাপ্য টাকার গাণিতিক প্রত্যাশা কত ? ৬

৬। দেখান যে C বিন্দুর সাপেক্ষে প্রথম পরম ভ্রামক ন্যূনতম হয় যখন C হচ্ছে মধ্যমা। ৬

৭। $(-1, 1)$ অন্তরে দুটি বিন্দু যদৃচ্ছভাবে ও স্বাধীনভাবে নির্বাচন করা হল। এই বিন্দুগুলির দ্বারা অন্তরটি যে তিনভাগে বিভক্ত হল তারা একটি ত্রিভুজের বাহু হওয়ার সম্ভাবনা কত ? ৬

৮। দেখান যে, $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$. ৬

৯। যদি X, Y অনপেক্ষ চলক হয় এবং $g_1(X), g_2(Y)$ যথাক্রমে X ও Y-এর সন্তত অপেক্ষক যাদের প্রত্যাশা অস্তিত্বমান, তাহলে দেখান যে

$$E\{g_1(X)g_2(Y)\} = E\{g_1(X)\}E\{g_2(Y)\}.$$ ৬

১০। যদি X একটি আদর্শ স্বাভাবিক চলক, χ^2 একটি $\chi^2(n)$ চলক এবং X ও χ^2 অনপেক্ষ হয় তাহলে দেখান যে $Y = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{\chi^2}{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}X}{\sqrt{\chi^2}}$ একটি t -চলক যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা n.

৬

বিভাগ – গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা ছোঁড়া হল। দেখান যে ‘মাথা’ ও ‘ছয়’ এই ঘটনাদুটি স্বাধীন। ৩

১২। যদি n -টি পরস্পর স্বাধীন ঘটনার সম্ভাবনা $p_1, p_2, \dots, p_n$ হয়, তাহলে দেখান যে এদের মধ্যে অন্ততঃ একটি ঘটার সম্ভাবনা হবে $1-(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n)$. ৩

১৩। দেখান যে

$$F(x) = 0, \; -\infty < x < 0$$
$$= 1 - e^{-x}, 0 \le x < \infty$$

একটি নিবেশন অপেক্ষক এবং নিবেশনটি অবিচ্ছিন্ন। সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকটি নির্ণয় করুন। ৩

১৪। যদি X একটি $\lambda\ (l)$ চলক হয় তবে $E\left(\sqrt{X}\right)$ নির্ণয় করুন।

৩

১৫। পোয়াসঁ নিবেশনের গড়মান নির্ণয় করুন। ৩

১৬। স্বাভাবিক নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক কি ? ৩

১৭। দেখান যে $\mu_{11} = \alpha_{11} - m_x m_y$. ৩

১৮। কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য বিবৃত করুন। ৩

English Version

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) From a can containing n-tickets numbered 1, 2, ..., n, r-tickets were successfully drawn after replacement each time. What is the probability that the highest number of the ticket drawn is i ? 5

b) A random variable X can take up values −1, 0, 1 with probabilities $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$, respectively. Write down the distribution function. 5

2. a) The probability density function of a random variate X is

$$f(x) = \frac{1}{40} e^{-\frac{x}{40}}, \quad x > 0$$

= 0, elsewhere.

Find the probabilities

(i) $P(X \leq 15)$, (ii) $P(40 < X \leq 50)$. 5

b) If X be a binomial (n, p) variate, find the distribution function of the random variate $Y = aX + b$. 5

3. a) Show that, for a normal distribution, $\mu_{2k+1} = 0$, $\mu_{2k} = 1.3.5 \ldots (2k-1)\sigma^{2k}$. 5

b) If X, Y be independent, then show that $P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = P(a < X \leq b) P(c < Y \leq d)$. 5

4. a) If X, Y be two standard normal variates, then find the mean of X^2Y^2. 5

b) If $a_1, a_2 \neq 0$ and b_1, b_2 be constants, then show that

$$\rho(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = \frac{a_1a_2}{|a_1||a_2|}\rho(X, Y). \quad 5$$

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Two players A and B start throwing a dice one after other. One who throws six first will be the winner. The prize is Rs. 99. If A throws six first, then what is the mathematical expectation of the money to be received by him ? 6

6. Show that the first absolute moment about the point C is minimum when C is the median. 6

7. Two points are randomly and independently chosen in the interval (−1, 1). What is the probability that the three segments so formed may be sides of a triangle ? 6

8. Show that $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$. 6

9. If X, Y be independent variates and $g_1(X), g_2(Y)$ be continuous functions of X and Y respectively whose expectations exists, then show that $E\{g_1(X)g_2(Y)\} = E\{g_1(X)\}E\{g_2(Y)\}$. 6

10. If X be a standard normal variate, χ^2 be a $\chi^2(n)$ variate and if X and χ^2 be independent, then show that

$$Y = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}X}{\sqrt{\chi^2}}$$

is a t-variate whose degrees of freedom is n. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. A coin and a dice are thrown. Show that 'Head' and 'Six' are two independent events. 3

12. If the probabilities of the occurrence of n mutually independent events be $p_1, p_2, \ldots, p_n$, then show that the probability of the occurrence of at least one of them is $1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$. 3

13. Show that

$$F(x) = 0, -\infty < x < 0$$

$$= 1 - e^{-x}, 0 \le x < \infty$$

is a distribution function and that it is continuous. Find the probability density function. 3

14. If X be a $\lambda\ (l)$ variate, compute $E\left(\sqrt{X}\right)$. 3

15. Find the mean of Poisson distribution. 3

16. What is the characteristic function of normal distribution ? 3

17. Show that $\mu_{11} = \alpha_{11} - m_x m_y$. 3

18. State the Central Limit Theorem. 3

Date of Publication	:	10.10.2014
Last date of Submission of Answer Script by the student	:	30.11.2014
Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before	:	12.01.2015