স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

পঞ্চম পত্র (5th Paper : **Linear Algebra & Transformation**)

পূর্ণমান ঃ ৫০ মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%

Full Marks : 50 Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b & c & 1 \\ a & 0 & c & 1 \\ a & b & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করুন

এবং এর সাহায্যে অথবা অন্য উপায়ে দেখান যে

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2+1 & c^2+1 & b^2+1 & b+c \\ c^2+1 & c^2+a^2+1 & a^2+1 & c+a \\ b^2+1 & a^2+1 & a^2+b^2+1 & a+b \\ b+c & c+a & a+b & 3 \end{vmatrix} = (bc+ca+ab)^2 .$$ ৫

(খ) অরথোগোনাল ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দিন। $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ একটি অরথোগোনাল ম্যাট্রিক্স হলে দেখান যে $x = a_{21}$, $y = a_{22}$, $z = a_{23}$ মানগুলি

$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$,

$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 1$,

$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$

সমীকরণত্রয়ের সমাধান হবে। ১ + ৪

২। (ক) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে একটি সারি সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে পরিণত করুন এবং সেটির মাত্রা নির্ণয় করুন। ৫

(খ) একটি সসীম ভেক্টর দেশের বনিয়াদের সংজ্ঞা দিন। দেখান যে কোন একটি সসীম ভেক্টর দেশের যে কোন দুটি বনিয়াদের ভেক্টরের সংখ্যা সর্বদা সমান হবে।

১ + ৪

৩। (ক) ইউক্লিডিয় ভেক্টর দেশের সংজ্ঞা দিন। একটি ইউক্লিডিয় ভেক্টর দেশে যে কোন দুটি ভেক্টর $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ -এর জন্য দেখান যে $\left\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right\| \leq \left\|\vec{\alpha}\right\| + \left\|\vec{\beta}\right\|$. ২ + ৩

(খ) কখন একটি দ্বিঘাত রূপ নিশ্চিত ধনাত্মক হবে ? $6x^2 + y^2 + 18z^2 - 4yz - 12zx$ দ্বিঘাত রূপটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। এর মাত্রা কত হবে লিখুন।

১ + ৩ + ১

৪। (ক) a, b, c অসমান বাস্তব সংখ্যা। দেখান যে

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & b+c & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b).$$

৫

(খ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. দেখান যে $A^2 - 2A - 3I_4$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হবে। এর সাহায্যে দেখান যে $|A| \neq 0$ এবং A^{-1} নির্ণয় করুন। ৩ + ১ + ১

বিভাগ – খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। (ক) একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানের সংজ্ঞা লিখুন। A এবং B দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $|A| \neq 0$ হলে দেখান যে B এবং ABA^{-1} ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের আইগেন মানগুলি একই হবে।

(খ) A একটি অরথোগোনাল ম্যাট্রিক্স এবং λ এটির একটি আইগেন মান হলে দেখান যে A^t-এর একটি আইগেন মান $\frac{1}{\lambda}$ হবে। (১ + ৩) + ২

৬। a এবং b-এর কোন্ কোন্ বাস্তব মানের জন্য

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= b \\ 5x + 7y + az &= b^2 \end{aligned}\right\}$$ সমীকরণ ত্রয়ের

(i) কেবলমাত্র একটি সমাধান আছে, (ii) অসংখ্য সমাধান আছে, (iii) কোন সমাধান থাকবে না, নির্ণয় করুন এবং উত্তরের পক্ষে যুক্তি দিন। ২ + ২ + ২

৭। $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ একটি রৈখিক অপেক্ষক এবং T-এর দ্বারা { (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, –1, –2) } বনিয়াদটি { (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1) } বনিয়াদে রূপান্তরিত হলে $T(x, y, z)$ নির্ণয় করুন এবং $T(2,1,2)$ নির্ণয় করুন। ৫ + ১

৮। দেখান যে E^3-এর (1, 2, –2) ,(2, 0, 1), (1, 1, 0) ভেক্টরত্রয় রৈখিক অনির্ভরশীল। এই তিনটি ভেক্টর থেকে Gram-Schmidt পদ্ধতির সাহায্যে E^3-এর একটি অরথোনরম্যাল বনিয়াদ নির্ণয় করুন। ২ + ৪

৯। $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটিকে স্বভাবী আকারে পরিবর্তিত করুন এবং কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। ৬

১০। ম্যাট্রিক্স বিষয়ক Cayley-Hamilton-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন। ১ + ৫

বিভাগ – গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in IR \right\}$; দেখান যে V, সকল 2×2 বাস্তব ম্যাট্রিক্স দেশের উপভেক্টর দেশ হবে। এর একটি বনিয়াদ নির্ণয় করুন। ২ + ১

১২। দেখান যে (1, 2, 1), (2, 2, 1) ভেক্টরদ্বয় IR^3 বনিয়াদ গঠন করে না। এটিকে বর্ধিত করে IR^3-এর বনিয়াদ গঠন করুন। ২ + ১

১৩। $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}; \begin{array}{c} a, b \in IR \\ ab \neq 0 \end{array} \right\}$. M_2 -এর যে কোন দুটি ম্যাট্রিক্স A, B-এর ক্ষেত্রে দেখান যে,

$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. ৩

১৪। $\begin{vmatrix} 0 & (x-y)^3 & (y-z)^3 \\ (y-x)^3 & 0 & (x-z)^3 \\ (z-y)^3 & (z-x)^3 & 0 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান নির্ণয় করুন। ৩

১৫। কোন ইউক্লিডিয় ভেক্টর দেশে যে কোন অশূন্য অরথোগোনাল ভেক্টর সেট রৈখিক অনির্ভর হবে, দেখান। ৩

১৬। $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$ ম্যাট্রিক্সদ্বয় প্রতিসম অথবা বিপ্রতিসম যাই হোক না কেন, দেখান যে $(AB + BA)$ সর্বদা প্রতিসম হবে। উদাহরণ দিয়ে দেখান যে দুটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স নাও হতে পারে। ২ + ১

১৭। $T : IR^2 \to IR^2$ এবং $T(x, y) = (x + y, x - y)$ হলে T একটি রৈখিক অপেক্ষক হবে কিন্তু $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$ হলে এই অপেক্ষক রৈখিক হবে না, দেখান। ৩

১৮। $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $B = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$; যদি অন্ততঃ $a_3 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ হয় তবে AB ম্যাট্রিক্সের মাত্রা নির্ণয় করুন। ৩

English Version

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. (a) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b & c & 1 \\ a & 0 & c & 1 \\ a & b & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Find the value of Δ and use it or otherwise show that

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2+1 & c^2+1 & b^2+1 & b+c \\ c^2+1 & c^2+a^2+1 & a^2+1 & c+a \\ b^2+1 & a^2+1 & a^2+b^2+1 & a+b \\ b+c & c+a & a+b & 3 \end{vmatrix} = (bc+ca+ab)^2.$$ 5

(b) Define orthogonal matrix. If $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ be an orthogonal matrix then show that $x = a_{21}$, $y = a_{22}$, $z = a_{23}$ is a solution of the equations $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$, $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 1$, $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$. 1 + 4

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$. Reduce the matrix A to a row-reduced echelon form and find its rank. 5

(b) Define basis of a finite dimensional vector space. Show that in a finite dimensional vector space the number of vectors in any two bases is equal. 1 + 4

3. (a) Definite Euclidean vector space. Show that in an Euclidean vector space for any two vectors $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$; $\left\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right\| \le \left\|\vec{\alpha}\right\| + \left\|\vec{\beta}\right\|$. 2 + 3

(b) When a quadratic form will be positive definite ? Find the nature of the quadratic form $6x^2 + y^2 + 18z^2 - 4yz - 12zx$ and find its rank too. 1 + 3 + 1

4. (a) *a, b, c* are unequal real numbers. Show that

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & b+c & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b).$$ 5

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Show that $A^2 - 2A - 3I_4$ is a null matrix. Taking help of this show that $|A| \ne 0$ and find A^{-1}. 3 + 1 + 1

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. (a) Define eigenvalue of a square matrix.

If A and B be two square matrices with $|A| \neq 0$, show that B and ABA^{-1} have same eigenvalues.

(b) A is orthogonal matrix and λ is one eigenvalue of A. Show that A^t has eigenvalue $\frac{1}{\lambda}$. (1 + 3) + 2

6. For what real values of a and b the equations

$x + y + z = 1$

$x + 2y - z = b$

$5x + 7y + az = b^2$

have (i) unique solution, (ii) infinite number of solutions, (iii) no solution ? Find and justify your answer. 2 + 2 + 2

7. $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ is a linear transformation and by T the basis { (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, –1, –2) } is transferred to the basis { (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1) }. Find $T(x,y,z)$ and write $T(2,1,2)$. 5 + 1

8. Show that the vectors (1, 2, –2) ,(2, 0, 1), (1, 1, 0) are linearly independent. Apply Gram-Schmidt process to find an orthonormal basis of E^3 from the above three vectors. 2 + 4

9. Reduce the quadratic form

$x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$

to canonical form and find the nature of the conic. 6

10. State Cayley-Hamilton theorem related to matrices and prove it. 1 + 5

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in I\!R \right\}$. Show that V is a subspace of the vector space of 2 × 2 real matrices. Find a basis of V. 2 + 1

12. Show that the vectors (1, 2, 1), (2, 2, 1) can not form a basis of $I\!R^3$. Extend this to a basis of $I\!R^3$. 2 + 1

13. $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}; \begin{matrix} a, b \in IR \\ ab \neq 0 \end{matrix} \right\}$.

For any two matrices A, B of M_2 show that

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$. 3

14. Find the value of the determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & (x-y)^3 & (y-z)^3 \\ (y-x)^3 & 0 & (x-z)^3 \\ (z-y)^3 & (z-x)^3 & 0 \end{vmatrix}.$$ 3

15. In an Euclidean vector space show that any set of non-null orthogonal vectors will be linearly independent. 3

16. $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $B = (b_{ij})_{n \times n}$. Show that the matrix $(AB + BA)$ is always symmetric in any case when the matrices A and B both symmetric or both skew-symmetric. Give an example to show that sum of two symmetric matrices may not be symmetric. 2 + 1

17. $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ and if $T(x, y) = (x + y, x - y)$ then T is a linear transformation and if $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$ then T is non-linear. Prove it. 3

18. If $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $B = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$, where at least $a_3 \neq 0, b_2 \neq 0$ then find the rank of the matrix AB. 3

Date of Publication : 10.10.2014

Last date of Submission of Answer Script by the student : 30.11.2014

Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before : 12.01.2015