স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

সপ্তম পত্র (7th Paper : **Mathematical Analysis-I**)

পূর্ণমান ঃ ৫০ মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%

Full Marks : 50 Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) মনে করুন অনুক্রম $\{x_n\}_n$ নিম্নভাবে সংজ্ঞাত আছে : $x_1 = 1$ এবং $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ সকল $n \geq 1$ -এর জন্য। দেখান যে $\{x_n\}_n$ অধঃ সীমাবদ্ধ, যথার্থ ক্রমবর্ধমান কিন্তু উর্ধ্ব সীমাবদ্ধ নয়। ১ + ১ + ১

(খ) মনে করুন S, $\mathbb{R}$-এর একটি অসীম উপসেট। যদি x সেট S-এর অন্তর্বিন্দু হয়, দেখান যে x সেট S-এর সীমাবিন্দু হবে। ৩

(গ) মনে করুন $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[\,a, b\,]$-তে সন্তত। প্রমাণ করুন যে f , $[\,a, b\,]$-তে সীমাবদ্ধ হবে। ৪

২। (ক) দেখান যে $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_n$ অভিসারী হবে। ৩

(খ) মনে করুন $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$-তে সন্তত। মনে করুন $g : (p, q) \to (a, b)$ এবং $x_0 \in (p,q)$. যদি $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে এবং সীমাটি c হয়, দেখান যে $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(c)$. ৩

(গ) মনে করুন $S = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; 3x^2 - 10x + 3 < 0 \,\}$ এবং $T = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, \cos x \neq 0 \,\}$. দেখান যে S ও T উভয়েই মুক্ত সেট। ২ + ২

৩। (ক) মনে করুন $\{f_n(x)\}_n$ সেট $S(\subset \mathbb{R})$-এ f অভিমুখে সমভাবে অভিসারী এবং প্রতি f_n সেট S-এ সীমাবদ্ধ। প্রমাণ করুন যে f , S-এ সীমাবদ্ধ হবে। ৩

(খ) দেখান যে $\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\ldots$ শ্রেণীটি অভিসারী কিন্তু উক্ত বন্ধনীগুলি বাদ দিয়ে দিলে প্রাপ্ত শ্রেণীটি অপসারী। ২ + ১

(গ) মনে করুন ξ অসীম সেট $S(\subset \mathbb{R})$-এর সীমা বিন্দু। দেখান যে S-এর ভিন্ন ভিন্ন পদ থেকে গঠিত এমন অনুক্রমের অস্তিত্ব আছে যা ξ অভিমুখে অভিসারী হবে। ৪

৪। (ক) মনে করুন $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ অপেক্ষকটি $[a, b]$-তে সীমিত ভেদযুক্ত। যদি $[c,d]\subseteq[a,b]$ হয়, প্রমাণ করুন যে f, $[c, d]$-তে সীমিত ভেদযুক্ত হবে। ৩

(খ) মনে করুন

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & \text{যদি } |y|<|x| \text{ হয়} \\ -y, & \text{যদি } |y|\geq|x| \text{ হয়}\end{cases}$$

f, $(0, 0)$ বিন্দুতে অবকলনযোগ্য কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

(গ) মনে করুন $f:S\to\mathbb{R}$ যেখানে S, $\mathbb{R}^2$-এর মুক্ত উপসেট ও $(a,b)\in S$. মনে করুন (a, b) বিন্দুতে f_x-এর অস্তিত্ব আছে এবং (a, b) বিন্দুর সামীপ্যে f_y সীমাবদ্ধ। প্রমাণ করুন যে f,(a, b)-তে সন্তত হবে। ৪

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। যে কোন সেট $S(\subset \mathbb{R})$-এর রুদ্ধকের সংজ্ঞা দিন। দেখান যে, রুদ্ধক $\overline{S}$ একটি বদ্ধ সেট এবং $\overline{S}$, S-এর ধারক সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম বদ্ধ সেট। ১ + ২ + ৩

৬। মনে করুন $f(x)=[x]$. দেখান যে f, $\mathbb{N}$-এর কোন বিন্দুতেই সন্তত নয় কিন্তু $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ -এ f সন্তত। ২ + ৪

৭। মনে করুন $\{a_n\}_n$ ধনাত্মক পদবিশিষ্ট ক্রমহ্রাসমান অনুক্রম এবং $\lim_{x\to\infty} a_n=0$. দেখান যে $\sum_n(-1)^{n-1}a_n$ শ্রেণীটি অভিসারী হবে। $\lim_{x\to\infty} a_n=0$ শর্তটি কি বাদ দেওয়া যায় ? ব্যাখ্যা করুন। ৫ + ১

৮। দেখান যে $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2x}$ শ্রেণীটি $x\geq a>0$-এর জন্য সমঅভিসারী।

৯। দেওয়া আছে যে f, $[a, b]$-তে সীমিত ভেদযুক্ত এবং এমন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা λ-এর অস্তিত্ব আছে যে সকল $x\in[a,b]$-এর জন্য $|f(x)|\geq\lambda$ হয়। প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{f}$, $[a, b]$-তে সীমিত ভেদযুক্ত হবে।

১০। মনে করুন $V = F(x,y)$ দ্বি-অবকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং

$$x = \frac{u}{2}(e^{v} + e^{-v}),\ y = \frac{u}{2}(e^{v} - e^{-v}).$$

দেখান যে $V_{xx} - V_{yy} = V_{uu} - \frac{1}{u^2}V_{vv} + \frac{1}{u}V_u$.

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। মনে করুন $f(x,y) = 1 + xy - ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$, y-কে x-এর অপেক্ষক হিসেবে সংজ্ঞাত করে। f_x ও f_y-এর আকারে $\frac{dy}{dx}$-এর সূত্র ব্যবহার করে দেখান যে $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$.

১২। যদি $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ হয়, সমাকলন পদ্ধতি ব্যবহার না করে দেখান যে $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$, $xy \neq -1$.

১৩। মনে করুন $A = [0, \infty)$ এবং $B_n = (-1, n)$ যেখানে $n \in \mathbb{N}$. যৌক্তিকতা প্রতিপন্ন করুন : $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, A-এর আবরণী কিন্তু $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ -এর কোন সসীম উপসেট নেই যা A-এর আবরণী হতে পারে।

১৪। $\lim_{x \to \infty} \sin x$ -এর অস্তিত্ব আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

১৫। মনে করুন A ও B অশূন্য, উর্ধ্ব সীমাবদ্ধ, $\mathbb{R}$-এর উপসেট। মনে করুন $C = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. মনে করুন $Sup\, A = M_1$, $Sup\, B = M_2$. দেখান যে $Sup\, C = M_1 + M_2$.

১৬। $\mathbb{R}$-এ কশি অনুক্রমের সংজ্ঞা দিন। মনে করুন $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, সকল n-এর জন্য। দেখান যে $\{x_n\}_n$ কশি অনুক্রম নয়। ১ + ২

১৭। মনে করুন $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(3^n \pi x)$, $x \in \mathbb{R}$, দেখান যে $f(x)$ সর্বত্র সন্তত।

১৮। $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right) x^n$ -এর অভিসরণ-অন্তরাল নির্ণয় করুন।

English Version

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. (a) Let the sequence $\{x_n\}_n$ be defined as follows :

$x_1 = 1$ and $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, for all $n \geq 1$.

Show that $\{x_n\}_n$ is bounded below, strictly increasing but not bounded above. 1 + 1 + 1

(b) Let S be an infinite subset of $\mathbb{R}$. If x be an interior point of S, show that x is accumulation point of S. 3

(c) Let $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ be continuous in the closed and bounded interval $[a, b]$. Prove that f is bounded in $[a, b]$. 4

2. (a) Show that $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_n$ is convergent. 3

(b) Let $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ be continuous at $c \in (a, b)$. Let $g:(p, q) \to (a, b)$ and $x_0 \in (p,q)$. If $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ exists and is equal to c, show that $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(c)$.

3

(c) Let $S = \{ x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0 \}$ and $T = \{ x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0 \}$. Show that S and T both are open sets. 2 + 2

3. (a) Let $\{f_n(x)\}_n$ converge uniformly to f on $S(\subset \mathbb{R})$ and each f_n is bounded on set S. Prove that f is bounded on S. 3

(b) Show that the series

$\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\ldots$ is convergent but

the series obtained from above by removing the brackets is divergent. 2 + 1

(c) Let ξ be an accumulation point of an infinite set $S(\subset \mathbb{R})$. Show that there exists a sequence of distinct elements of S, which converges to ξ. 4

4. (a) Let $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ be of bounded variation over $[a, b]$ and $[c, d] \subseteq [a,b]$. Prove that f is of bounded variation in $[c, d]$. 3

(b) Let $f(x,y) = \begin{cases} x, & |y| < |x| \\ -y, & |y| \geq |x| \end{cases}$

Examine the differentiability of f at $(0, 0)$.

3

(c) Let $f: S \to \mathbb{R}$ where S is open subset of $\mathbb{R}^2$ and $(a, b) \in S$. Let f_x exists at (a, b) and f_y be bounded in a neighbourhood of the point (a, b). Prove that f is continuous at (a, b). 4

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Define closure of any set $S(\subset \mathbb{R})$. Show that the closure $\overline{S}$ is a closed set and $\overline{S}$ is the smallest closed set containing S. 1 + 2 + 3

6. Let $f(x) = [x]$. Show that f is not continuous at any point of $\mathbb{N}$ but f is continuous on $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. 2 + 4

7. Let $\{a_n\}_n$ be positive-termed decreasing sequence and $\underset{x \to \infty}{Lim}\, a_n = 0$. Show that the series $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ is convergent. Can we drop the condition $\underset{x \to \infty}{Lim}\, a_n = 0$? Explain. 5 + 1

8. Show that the series $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x}$ converges uniformly for $x \geq a > 0$.

9. If f be of bounded variation over $[a, b]$ and there exists positive real number λ such that $|f(x)| \geq \lambda$ for all $x \in [a, b]$, prove that $\frac{1}{f}$ is also of bounded variation over $[a, b]$.

10. Let $V = F(x, y)$ be twice differentiable function and $x = \frac{u}{2}(e^v + e^{-v})$, $y = \frac{u}{2}(e^v - e^{-v})$. Show that $V_{xx} - V_{yy} = V_{uu} - \frac{1}{u^2} V_{vv} + \frac{1}{u} V_u$.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Assume that $f(x, y) = 1 + xy - ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ defines y as a function of x. Using the formula for $\frac{dy}{dx}$ in terms of f_x and f_y, show that $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$.

12. If $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, prove without using the method of integration that $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$, $xy \neq -1$.

13. Let $A = [0, \infty)$ and $B_n = (-1, n)$ where $n \in \mathbb{N}$. Justify : $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ covers A but no finite sub-collection of $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ can cover A.

14. Examine whether $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ exists or not.

15. Let A and B be two non-void bounded above subsets of $\mathbb{R}$. Let $C = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Let $Sup\, A = M_1$, $Sup\, B = M_2$. Show that $Sup\, C = M_1 + M_2$.

16. Define a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$. Let $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ for all n. Show that $\{x_n\}_n$ is not a Cauchy sequence. 1 + 2

17. If $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(3^n \pi x)$, $x \in \mathbb{R}$, show that $f(x)$ is continuous everywhere.

18. Find the interval of convergence of $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right) x^n$.

Date of Publication	:	10.10.2014
Last date of Submission of Answer Script by the student	:	30.11.2014
Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before	:	12.01.2015