স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

অষ্টম পত্র (8th Paper : **Mathematical Analysis-II**)

পূর্ণমান ঃ ৫০ মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%
Full Marks : 50 Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। ক) মনে করুন $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ অন্তরে ক্রমবর্ধমান (monotonic increasing) অপেক্ষক। প্রমাণ করুন যে $[a,b]$ অন্তরে f রিমান সমাকলনযোগ্য। ৬

খ) [0, 4] অন্তরে f একটি অপেক্ষক যেটির সংজ্ঞা হল $f(x)=x-[x],\ x\in[0,4]$ (এখানে [x] বলতে x-এর সর্বোচ্চ অখণ্ড অংশটি বোঝাবে)। দেখান যে ঐ অন্তরে f অসন্তত। ঐ অন্তরে f সমাকলনযোগ্য কিনা যুক্তিসহ উত্তর দিন। ২ + ২

২। ক) মনে করুন [a, b] অন্তরে f একটি সন্তত অপেক্ষক। ঐ অন্তরে g একটি রিমান সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক। যদি [a, b] অন্তরে g সর্বদাই সমচিহ্নবিশিষ্ট (হয় ধনাত্মক নতুবা ঋণাত্মক) হয়, তবে দেখান যে [a, b] অন্তরালে একটি বিন্দু C পাওয়া যাবে যাতে

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx .$$ ৬

খ) মনে করুন $f:[a,b]\to[a,b]$ অন্তরে সন্তত অপেক্ষক। দেখান যে ঐ অন্তরালে একটি বিন্দু $c\in[a,b]$ পাওয়া যাবে যাতে $f(c)=c$ হয়। ৪

৩। ক) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ ঘাত শ্রেণীটির অভিসরণের অন্তরালে যোগফল $\log_e(1+x)$ ধরে নিয়ে দেখান যে

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\ldots = 2\log_e 2-1 .$$ ৬

খ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n.5^n}$ ঘাত শ্রেণীটির সম-অভিসরণের অন্তরাল নির্ণয় করুন। ৪

৪। ক) নিম্নে সংজ্ঞাত 2π-পর্যায়বিশিষ্ট অপেক্ষক f-এর Fourier শ্রেণী নির্ণয় করুন :

$$f(x) = -1, \quad -\pi < x < 0$$
$$= 1, \quad 0 \le x \le \pi.$$

$x = \pi$ বিন্দুতে শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

আরও দেখান যে $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$

৪ + ১ + ১

খ) দেখান যে —

i) $\Gamma(1) = 1$

ii) $\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n), n > 0.$ ২ + ২

বিভাগ – খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। ক) কোন বদ্ধ অন্তরে f^2 সমাকলনযোগ্য হলে ঐ বদ্ধ অন্তরে f সমাকলনযোগ্য হবে কি ? যুক্তিসহ উত্তর দিন। ১ + ২

খ) সমাকলনবিদ্যার প্রথম মধ্যমান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখান যে

$$\frac{16\sqrt{2}}{41\pi} \le \int_{1/4}^{3/4} \frac{\sin \pi x}{2 + x^2}\, dx \le \frac{16\sqrt{2}}{33\pi}$$ ৩

৬। $\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{-m}}{1+x}\, dx$ অযথার্থ সমাকলটির অভিসরণের বিষয়ে আলোচনা করুন। ৬

৭। $a > 0$ হলে দেখান যে

$$\int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\log(1+a^2)\tan^{-1} a$$ ৬

৮। $1 + 2.4x + 3.4^2 x^2 + 4.4^3 x^3 + \ldots + n.4^{n-1}.x^{n-1} + \ldots.$ ঘাত শ্রেণীটির অভিসরণের অন্তরাল নির্ণয় করুন। ঐ অন্তরালে ঘাত শ্রেণীটির যোগফল $f(x)$ হলে $\int_0^{1/8} f(x)\, dx$-এর মান নির্ণয় করুন। ৩ + ৩

৯। $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$ সমাকলের মান নির্ণয় করুন। ৬

১০। xy-তলে $y = 2x$ এবং $y = 2x^2$ রেখা দ্বারা বেষ্টিত স্থানের উপরিভাগে $z = 7 - 3x^2 - y^2$ তল দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের আয়তন নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ – গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। কখন একটি ত্রিকোণমিতিক শ্রেণী

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ একটি 2π পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক f অন্তরাল $[-\pi,\pi]$ সংজ্ঞায়িত সাপেক্ষে ফুরিয়ার শ্রেণী হবে ? দৃষ্টান্ত সহকারে দেখান যে ত্রিকোণমিতিক শ্রেণী ফুরিয়ার শ্রেণী নাও হতে পারে।

১২। $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,$[a,b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হলে প্রমাণ করুন যে, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$.

১৩। দেখান যে $\lim_{x\to 3}\frac{\int_3^x e^{\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}\,dt}{x^2-9}=\frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}\sqrt{82}}$.

১৪। মান নির্ণয় করুন : $\int_0^1 x^3(1-x^2)^{5/2}dx$.

১৫। দেখান যে $\int_{-1}^{1}\frac{\cos xy}{\sqrt{1-x^2}}dx$ সমাকলটি $-\infty<y<+\infty$ অন্তরে সমভাবে অভিসারী (uniformly convergent)।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৬। যদি D ক্ষেত্রটি xy তলে $xy = 1$, $y = 0$, $y = x$ এবং $x = 2$ রেখাগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ হয় তবে $\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$ সমাকলের মান নির্ণয় করুন।

১৭। $x^2+y^2\le a^2$, $x\ge 0$ অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় করুন।

১৮। দেখান যে $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{x}{\sin x}\,dx>\frac{\pi^2}{24}$.

English Version

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Let function $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ be a monotonic increasing on $[a,b]$. Prove that f is Riemann integrable on $[a,b]$. 6

   b) A function f is defined on [0, 4] as $f(x)=x-[x]$, $x\in[0,4]$ (here [x] denotes the integral part of x). Show that f is discontinuous on [0, 4]. State with justification whether f is integrable on that interval. 2 + 2

2. a) Let f be a continuous function on [a, b] and g be Riemann integrable function on [a, b]. If g always keeps same sign on [a, b] (either always positive or always negative), then show that there exists a point C in [a, b] such that

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx .$$ 6

   b) Let $f:[a,b]\to[a,b]$ be a continuous function. Show that there exists a point $c\in[a,b]$ such that $f(c)=c$. 4

3. a) Assuming the sum of the power series $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ is equal to $\log_e(1+x)$ in its interval of convergence, prove that

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\ldots = 2\log_e 2-1 .$$ 6

   b) Find the interval of uniform convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n.5^n}$. 4

4. a) Find the Fourier series of the following 2π-periodic function f defined as

$f(x)=-1, \quad -\pi<x<0$

$=1, \quad 0\le x\le\pi .$

Find the sum of the series at $x=\pi$.

Also show that $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots .$

4 + 1 + 1

   b) Show that —

   i) $\Gamma(1)=1$

   ii) $\Gamma(n+1)=n.\Gamma(n), n>0$. 2 + 2

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. a) If f^2 be integrable on a closed, bounded interval, will f be integrable on that interval ? Justify your answer. 1 + 2

   b) Using first mean value theorem of integral calculus, show that

$$\frac{16\sqrt{2}}{41\pi} \le \int_{1/4}^{3/4} \frac{\sin \pi x}{2+x^2}\, dx \le \frac{16\sqrt{2}}{33\pi}$$ 3

6. Discuss on the convergence of the improper integral $\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{-m}}{1+x} dx$. 6

7. If $a > 0$, then show that

$$\int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\log(1+a^2)\tan^{-1} a$$ 6

8. Find the interval of convergence of the power series

   $1 + 2.4x + 3.4^2x^2 + 4.4^3x^3 + \ldots + n.4^{n-1}.x^{n-1} + \ldots$.

   If $f(x)$ be the sum of the series in that interval, evaluate $\int_0^{1/8} f(x)dx$. 3 + 3

9. Evaluate $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$. 6

10. Find the volume of the solid enclosed by the plane $z = 7 - 3x^2 - y^2$ above the region of the xy-plane bounded by $y = 2x$ and $y = 2x^2$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. When is a trigonometric series $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ said to be a Fourier series corresponding to a periodic function f of period 2π defined in $[-\pi, \pi]$? Give an example of a trigonometric series which may not be a Fourier series.

12. If $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be integrable on [*a, b*], then show that $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$.

13. Show that $\lim_{x \to 3} \frac{\int_3^x e^{\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}\, dt}{x^2-9} = \frac{1}{6} e^{\frac{1}{2}\sqrt{82}}$.

14. Evaluate $\int_0^1 x^3 (1-x^2)^{5/2} \mathrm{d}x$.

15. Show that the integral $\int_{-1}^{1} \frac{\cos xy}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$ is uniformly convergent on the interval $-\infty < y < +\infty$.

16. If D is a region in the xy-plane bounded by the lines $xy = 1$, $y = 0$, $y = x$ and $x = 2$, evaluate the integral $\iint_D (x^2 + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17. Find the centre of gravity of the hemisphere $x^2 + y^2 \le a^2$, $x \ge 0$.

18. Show that $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\sin x} \mathrm{d}x > \frac{\pi^2}{24}$.

Date of Publication	:	10.10.2014
Last date of Submission of Answer Script by the student	:	30.11.2014
Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before	:	12.01.2015