স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

প্রথম পত্র (1st Paper : **Differential Calculus and its Geometrical Application**)

পূর্ণমান ঃ ৫০ মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%
Full Marks : 50 Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। ক) Lagrange-এর মধ্যমান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন ও প্রমাণ করুন। ৬

খ) মান নির্ণয় করুন $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. ৪

২। ক) $(\varepsilon - \delta)$ সংজ্ঞার সাহায্যে দেখান যে $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্ততঃ, যেখানে

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
$$= 0, \quad x = 0$$ ৬

খ) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$-এর $\tan^{-1}x$-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন। ৪

৩। ক) দেখান যে $x > 0$ এর জন্য $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$. ৬

খ) যদি $y = (\sin^{-1}x)^2$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$, $y_n = \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$. ৪

৪। ক) যদি $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ হয়, প্রমাণ করুন যে $\dfrac{\partial x}{\partial r} \neq \dfrac{1}{\frac{\partial r}{\partial x}}$ এবং $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} \neq \dfrac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial x}}$. ৬

খ) যদি $z = e^{xy^2}$ হয়, তবে $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ এর মান $t = \dfrac{\pi}{2}$ তে নির্ণয় করুন যখন $x = t\cos t$, $y = t\sin t$. ৪

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। কখন নিচের অপেক্ষকটি চরম বা অবম মান পাবে ?

$a\cos x + b\cos 2x \quad (a, b > 0)$. ৬

৬। প্রমাণ করুন যে

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} \neq \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}.$$ ৬

৭। $u = \sqrt{xy}$ হলে, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$-এর মান কত হবে ? ৬

৮। $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ বক্রটির মূলবিন্দুতে স্পর্শক নির্ণয় করুন। ৬

৯। প্রমাণ করুন যে, $r = a(1-\cos\theta)$-এর বক্রতা ব্যাসার্ধটি এর রেডিয়াস ভেক্টরের বর্গমূলের সঙ্গে সমানুপাতী। ৬

১০। $(x+y)^2(x+2y+2) = x+9y+2$-এর অসীমপথগুলি নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $f(x)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চলটি নির্ণয় করুন, যেখানে $f(x) = \sqrt{(3x-1)(7-x)}$. ৩

১২। $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0$

$= e^2, \quad x = 0$

এই অপেক্ষকটি কি $x = 0$ বিন্দুতে সন্ততঃ ? যাচাই করুন। ৩

১৩। $\lim_{x\to 1}[x]$ লিমিটটির অস্তিত্ব আছে কি ? যদি থাকে, তবে মানটি নির্ণয় করুন। ৩

১৪। যদি $V = v(x,y,z)$ একটি n ঘাতের হোমোজিনিয়াস অপেক্ষক হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{\partial v}{\partial x}$ একটি $(n-1)$ ঘাতের হোমোজিনিয়াস অপেক্ষক। ৩

১৫। $y = x + \frac{1}{x}$-এর যে বিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের সমান্তরাল, সেই বিন্দুটি নির্ণয় করুন। ৩

১৬। প্রমাণ করুন যে নিম্নলিখিত বক্রদুটির মধ্যবর্তী কোণটি a ও b নিরপেক্ষ :

$r^n = a^n\sec(n\theta+\alpha), \quad r^n = b^n\sec(n\theta+\beta)$ ৩

১৭। প্রমাণ করুন যে, $y = c\cosh\frac{x}{c}$ বক্রটির জন্য $\rho = \frac{y^2}{c}$, যেখানে ρ যে কোন বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ। ৩

১৮। $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির অভিলম্বটি $lx + my = 1$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $al^3 + 2alm^2 = m^2$. ৩

English Version

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) State and prove Lagrange's Mean Value Theorem. 6

   b) Find $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. 4

2. a) Using $(\varepsilon - \delta)$ definition, show that the function

   $$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
   $$= 0, \qquad x = 0$$

   is continuous at $x = 0$. 6

   b) Differentiate $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ with respect to $\tan^{-1} x$. 4

3. a) Show that $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ if $x > 0$. 6

   b) If $y = (\sin^{-1} x)^2$, prove that

   $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2 y_n = 0$,

   $y_n = \dfrac{d^n y}{dx^n}$. 4

4. a) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, prove that

   $\dfrac{\partial x}{\partial r} \neq \dfrac{1}{\frac{\partial r}{\partial x}}$ and $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} \neq \dfrac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial x}}$. 6

   b) If $z = e^{xy^2}$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, obtain

   $\dfrac{dz}{dt}$ at $t = \dfrac{\pi}{2}$. 4

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. When does the given function attain its maxima or minima ?

   $a\cos x + b\cos 2x$ ($a, b > 0$). 6

6. Prove that

   $$\underset{x \to 0}{Lt}\ \underset{y \to 0}{Lt}\ \frac{x-y}{x+y} \neq \underset{y \to 0}{Lt}\ \underset{x \to 0}{Lt}\ \frac{x-y}{x+y}.$$ 6

7. If $u = \sqrt{xy}$, find the value of $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 6

8. Find the equation of the tangent at origin for $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$. 6

9. Show that the radius of curvature at any point on the curve $r = a(1-\cos\theta)$ varies as the square root of the radius vector. 6

10. Find the asymptotes of

    $(x+y)^2(x+2y+2) = x+9y+2$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Find the domain of definition of $f(x)$ where $f(x) = \sqrt{(3x-1)(7-x)}$. 3

12. Is the function

$$f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0$$

$$= e^2, \qquad x = 0$$

continuous at $x = 0$? Verify. 3

13. Does the limit $\underset{x \to 1}{Lt} [\, x \,]$ exist ? If yes, find it. 3

14. If $V = v(x, y, z)$ is a homogeneous function of degree n then prove that $\frac{\partial v}{\partial x}$ is a homogeneous function of degree $n-1$. 3

15. Find the point at which the tangent to the curve $y = x + \frac{1}{x}$ is parallel to the x axis. 3

16. Prove that the curves $r^n = a^n \sec(n\theta + \alpha)$ and $r^n = b^n \sec(n\theta + \beta)$ intersect at an angle which is independent of a and b. 3

17. For the curve $y = c\cos h\frac{x}{c}$, prove that $\rho = \frac{y^2}{c}$, ρ is the radius of curvature at any point on the curve. 3

18. If $lx + my = 1$ is a normal to the parabola $y^2 = 4ax$, then show that $al^3 + 2alm^2 = m^2$. 3

Date of Publication	:	10.10.2014
Last date of Submission of Answer Script by the student	:	30.11.2014
Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before	:	12.01.2015