স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

নবম পত্র (9th Paper : **Kinematics**)

পূর্ণমান : ৫০ — মানের গুরুত্ব : ৩০%

Full Marks : 50 — Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

১। একক ভরের একটি কণা দুটি কেন্দ্র A ও B দ্বারা আকৃষ্ট হচ্ছে। প্রতিটি কেন্দ্র সেটিকে $\frac{\mu}{x^2}$ বল দ্বারা আকর্ষণ করে যেখানে x হল ঐ কেন্দ্র থেকে কণার দূরত্ব। প্রাথমিকভাবে কণাটিকে স্থির অবস্থায় বর্ধিত AB-এর উপর, AB-এর মধ্যবিন্দু থেকে $a\sqrt{3}$ দূরত্বের কোন বিন্দু থেকে BA বরাবর প্রক্ষেপ করা হল। দেখান যে, ঐ কণা $\frac{a^2}{\sqrt{\mu}}\left[1-\frac{1}{\sqrt{6}}\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]$ সময় পর B বিন্দুতে আসবে যেখানে $AB = 2a$. ১০

অথবা

কোন কেন্দ্রীয় কক্ষপথে চলমান কেন্দ্রীয় বলাধীন কোন কণার উপর প্রযুক্ত বল কেন্দ্র থেকে ঐ কণার দূরত্বের সমানুপাতী। যদি ঐ কণার গতিপথে দুটি অপদূরক বিন্দু থাকে যাদের অপদূরক দূরত্ব a এবং b, তাহলে দেখান যে ঐ কণার গতিপথের সমীকরণ হবে $u^2 = \frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}$। এর থেকে প্রমাণ করুন যে a অপদূরক দূরত্বের বিন্দু থেকে (u,θ) বিন্দুতে পৌঁছাতে কণাটি যে সময় নেয় তা $\tan^{-1}\left(\frac{a\tan\theta}{b}\right)$-এর সমানুপাতী। ৭ + ৩

২। প্রমাণ করুন কোন সুষম বহুভুজের জাড্য ভ্রামক সেটির কেন্দ্রগামী যে কোন সরলরেখার সাপেক্ষে $\dfrac{\frac{Mc^2}{24}\left[2+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$, যেখানে বহুভুজের বাহুর সংখ্যা $= n$, প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $= c$ এবং বহুভুজের ভর $= M$. ১০

অথবা

একটি ফাঁপা বৃত্তাকার বেলনকে স্থির অবস্থায় রাখা হয়েছে, যেখানে বেলনের অক্ষ অনুভূমিক। এর ভিতর একটি বৃত্তাকার চাকতি তার তলকে উল্লম্ব রেখে গড়াচ্ছে। যখন চাকতিটি তার

নিম্নতম অবস্থানে থাকে তখন তার গতিবেগ $\sqrt{\frac{8}{3}g(a-b)}$ । দেখান যে চাকতির কেন্দ্র বেলনের কেন্দ্রের সাপেক্ষে ϕ পরিমাণ কোণ যে সময়ে ঘোরে তার মান $\sqrt{\frac{3(a-b)}{2g}}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{4}\right)$ । এখানে a ও b হল যথাক্রমে বেলনের ও চাকতির ব্যাসার্ধ। ১০

৩। কোন সমতলে কোন বক্ররেখায় গতিশীল কোন কণার স্পর্শক ও অভিলম্ব বরাবর ত্বরণের উপাংশ নির্ণয় করুন। ৬

অথবা

কোন কণা a ব্যাসার্ধ যুক্ত কোন বৃত্তাকার পথে এমনভাবে ভ্রমণশীল যাতে সেটির স্পর্শক বরাবর ত্বরণ অভিলম্ব বরাবর ত্বরণের k গুণ। যদি বৃত্তের উপর কোন বিন্দুতে কণাটির বেগ u হয় তবে দেখান যে কণাটি পুনরায় ঐ বিন্দুতে ফিরে আসতে যে সময় নেবে তার মান $\frac{9}{ku}(1-e^{-2k\pi})$, যেখানে k ধ্রুবক। ৬

৪। প্রমাণ করুন যে কোন ফাঁপা অর্ধগোলকের ভূমির পরিসীমার ওপর যে কোন বিন্দুতে মোমেন্টাল ইলিপ্সয়েডের সমীকরণ হল $2x^2+5(y^2+z^2)-3zx=0$ । ৬

অথবা

$2a$ দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড তার একপ্রান্তে আটকানো একটি দড়ির সাহায্যে O বিন্দু থেকে ঝোলানো আছে। দড়ির দৈর্ঘ্য l ।

দড়ি ও দণ্ড দুটিই O বিন্দুগামী উল্লম্ব রেখার চারিদিকে ধ্রুব কৌণিক বেগে ঘোরে এবং উল্লম্বের সঙ্গে দড়ি ও দণ্ড যথাক্রমে θ ও ϕ কোণে নত। দেখান যে $\frac{3l}{a}=\frac{4\tan\theta-3\tan\phi}{\tan\phi-\tan\theta}\cdot\frac{\sin\phi}{\sin\theta}$. ৬

৫। M ভর বিশিষ্ট একটি বস্তু H ধ্রুবক হারে কর্মরত একটি ইঞ্জিন দ্বারা ক্রিয়াশীল হয়ে ধ্রুবক বাধা R সত্ত্বেও একটি সরলরেখায় গতিশীল। দেখান যে, ঐ বস্তুটির চরম দ্রুতির মান $\frac{H}{R}$ হবে এবং স্থিরাবস্থা থেকে ঐ চরম দ্রুতি পৌঁছাতে $\frac{MH}{R^2}\left(ln\,2-\frac{1}{2}\right)$ সময় লাগবে। ৬

অথবা

একটি উপবৃত্তাকার পাত তার নিজের সমতলে একটি ফোকাসের সাপেক্ষে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে। ঐ ফোকাসটিকে আবদ্ধ রাখা হয়েছে। হঠাৎ এই ফোকাসকে মুক্ত করে অন্য ফোকাসকে আবদ্ধ করা হল। দেখান যে, উপবৃত্তাকার পাতটি এখন ঐ ফোকাসের সাপেক্ষে $\frac{2-5e^2}{2+3e^2}\omega$ কৌণিক বেগে ঘুরবে, যেখানে e হল উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা। ৬

৬। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

ক) অভিকর্ষের প্রভাবে কোন নততল বরাবর পতনশীল কোন কণার স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির সমষ্টি ধ্রুবক — প্রমাণ করুন।

খ) যদি কোন সরল সমঞ্জস গতিতে একটি কণা চলে এবং ঐ গতির বিস্তার a হয় এবং দোলন কাল T হয় তবে দেখান যে মূলবিন্দু থেকে x দূরত্বে পৌঁছাতে কণাটির $\frac{T}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ পরিমাণ সময় লাগবে এবং ঐ অবস্থানে কণাটির বেগ হবে $\frac{2\pi}{T}\sqrt{a^2-x^2}$.

গ) কোন বিন্দু O থেকে $\sqrt{2gk}$ বেগে XOY উল্লম্ব তলে কণাসমূহ নিক্ষেপ করা হল। O বিন্দুকে মূলবিন্দু, O বিন্দুগামী অনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখাকে যথাক্রমে OX এবং OY ধরলে দেখান যে ঐ কণাসমূহ XOY সমতলে অভিকর্ষের প্রভাবে যে সকল অধিবৃত্তের উপর থাকবে তাদের শীর্ষবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ $x^2+4y^2=4yk$ সমীকরণ বিশিষ্ট একটি উপবৃত্ত।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ঘ) চলমান একটি মসৃন গোলকের সঙ্গে স্থিতাবস্থায় বর্তমান অন্য একটি সমভরবিশিষ্ট মসৃণ গোলকের সংঘর্ষ হয়। দেখান যে ঐ সংঘর্ষের পর তাদের বেগ $(1-e):(1+e)$ অনুপাতে থাকবে যেখানে e ঐ সংঘর্ষের স্থাপিতাঙ্ক।

৭। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

ক) একটি সুষম তারকে অর্ধবৃত্তের আকারে বেঁকানো হয়েছে, যার ব্যাসার্ধ a । দেখান যে, ব্যাসের একপ্রান্তে তারটির সমতলের উপর যে দুটি মুখ্য অক্ষ আছে তারা ব্যাসটির সঙ্গে যথাক্রমে $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{\pi}$ ও $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{\pi}\right)$ কোণে নত।

খ) একটি দৃঢ় বস্তুর উপর ওজন বল একটি সংরক্ষী বল — প্রমাণ করুন।

গ) একটি গোলকের অন্য একটি সমান ভরযুক্ত স্থির গোলকের সাথে তির্যকভাবে সংঘর্ষ হলে এবং গোলকদুটি মসৃণ ও পূর্ণভাবে স্থিতিস্থাপক হলে, দেখান যে, সংঘর্ষের পর গোলক দুটির পথ পরস্পর লম্ব।

ঘ) একটি ঘন বৃত্তাকৃতি বেলনের অক্ষের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করুন।

English Version

1. A unit mass is attracted by the two centres of forces A and B. Each centre attracts the particle by the force $\frac{\mu}{x^2}$, where x is the distance of the particle from that centre. Initially the particle is projected from rest from a point on AB produced at a distance $a\sqrt{3}$ from the midpoint of AB along BA. Prove that the particle will reach B after a time $\frac{a^2}{\sqrt{\mu}}\left[1-\frac{1}{\sqrt{6}}\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]$, where $AB = 2a$. 10

OR

The central force acting on a particle moving in a central orbit is directly proportional to the distance of the particle from the centre. If there exist two apses on the path of the particle whose apsidal distances are a and b respectively, then prove that the equation of the path of the particle is $u^2 = \frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}$. Hence prove that the time taken by the particle to reach a point (u,θ) from the apse with apsidal distance a is proportional to $\tan^{-1}\left(\frac{a\tan\theta}{b}\right)$. 7 + 3

2. Prove that the moment of inertia of a regular polygon with n sides with respect to a straight line passing through its centre is $\dfrac{\frac{Mc^2}{24}\left[2+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$, where M is the mass of the polygon and c is the length of each side. 10

OR

A hollow circular cylinder is kept at rest with its axis horizontal. A circular disc is sliding within it keeping its plane vertical. When the disc is at its lowest position, its velocity is $\sqrt{\frac{8}{3}g(a-b)}$. Prove that the centre of the disc rotates through an angle ϕ with respect to the centre of cylinder in time $\sqrt{\frac{3(a-b)}{2g}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{4}\right)}$, where a and b are the radii of the cylinder and the disc respectively. 10

3. Find the tangential and normal components of acceleration of a particle moving along a curve in a plane. 6

OR

A particle is moving along a circular orbit with radius a in such a manner that its tangential acceleration is k times its normal acceleration. If the velocity of the particle be u at any point on its path, then prove that the particle will return to the point in time $\frac{9}{ku}(1-e^{-2k\pi})$, where k is a constant. 6

4. Prove that the equation of the momental ellipsoid at any point of the perimeter of the base of a hollow hemisphere is $2x^2 + 5(y^2 + z^2) - 3zx = 0$. 6

OR

A rod of length $2a$ is hung by a string fixed at one end O. The length of the strings is l. Both of the string and the rod rotate with respect to a vertical line through the point of suspension O with constant angular velocity. The string and the rod are inclined at angles θ and ϕ respectively with the vertical. Prove that $\frac{3l}{a} = \frac{4\tan\theta - 3\tan\phi}{\tan\phi - \tan\theta} \cdot \frac{\sin\phi}{\sin\theta}$. 6

5. A body of mass M is propelled by an engine working at a constant rate H. It overcomes the constant resistance R and is moving in a straight line. Prove that the maximum speed of the body is $\frac{H}{R}$ and the time in which this maximum speed is reached by the body from rest is $\frac{MH}{R^2}\left(ln\, 2 - \frac{1}{2}\right)$. 6

OR

An elliptic disc is rotating about its focus in its plane with angular velocity ω, when the focus is fixed. Suddenly this focus is released and the other focus is fixed. Prove that the angular velocity with which the disc will rotate about the present focus is $\frac{2-5e^2}{2+3e^2}\omega$, where e is the eccentricity of the ellipse. 6

6. Answer any *two* questions : $3 \times 2 = 6$

a) Prove that the sum of kinetic and potential energy of a particle moving along an inclined plane under gravity is constant.

b) A particle is moving in a simple harmonic motion (S.H.M.) with amplitude a and time period T. Prove that the time taken by the particle to reach the point at a distance x from the origin is $\frac{T}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ and the velocity at that point is $\frac{2\pi}{T}\sqrt{a^2 - x^2}$.

c) A bunch of particles is projected from any point O with velocity $\sqrt{2gk}$ in the XOY vertical plane. Taking O as origin and the horizontal and vertical lines through O as OX and OY respectively, prove that the locus of the vertex of the parabola on which the particles will be situated in the vertical plane XOY under gravity is an ellipse whose equation is $x^2 + 4y^2 = 4yk$.

d) A moving smooth sphere collides with another sphere of same mass at rest. Prove that after this collision, the ratio of their velocities will be $(1-e):(1+e)$ where e is the coefficient of restitution of the impact.

7. Answer any *two* questions. $3 \times 2 = 6$

a) A uniform wire is bent in the form of a semicircle with radius a. Prove that the two principal axes at one extremity of the diameter in the plane of the wire are inclined with the diameter at the angles $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{\pi}$ and $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{\pi}\right)$ respectively.

b) The weight of a rigid body is a conservative force. Prove it.

c) A sphere collides with another sphere of same mass obliquely. The two spheres are smooth and perfectly elastic. Prove that the paths of the spheres after the collision are perpendicular to each other.

d) Find the moment of inertia of a solid circular cylinder with respect to its axis.

Date of Publication	:	10.10.2014
Last date of Submission of Answer Script by the student	:	30.11.2014
Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before	:	12.01.2015