স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

চতুর্থ পত্র (4th Paper : **Vector Algebra & Vector Calculus**)

পূর্ণমান ঃ ৫০ মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%

Full Marks : 50 Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। ক) প্রমাণ করুন যে কোন চতুস্তলকের (tetrahedron) শীর্ষবিন্দু এবং তার বিপরীত তলের ভরকেন্দ্র সংযোগকারী সরলরেখাগুলি এক বিন্দুতে মিলিত হয় (ভেক্টর পদ্ধতি দ্বারা)। ৫

খ) যে কোন ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রে $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$, ত্রিকোণমিতির এই সূত্রটি ভেক্টর নিয়মে প্রমাণ করুন। ৫

২। ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন, যে কোন ত্রিভুজের কোণ তিনটির অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দুগামী। ৫

খ) যদি $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ যথাক্রমে A, B এবং C বিন্দুর ভেক্টর স্থানাঙ্ক হয়, তবে দেখান যে $\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}$, ABC তলের উপর লম্ব। $\frac{1}{2} | \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} |$-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য কি ? ৫

৩। ক) একটি ভেক্টর রাশির curl ও divergence-এর সংজ্ঞা দিন। $\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r}$, এই ভেক্টর রাশিটির divergence ও curl নির্ণয় করুন যেখানে $\hat{r}$ হল $\vec{r}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর এবং r, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$-এর মান নির্দেশ করে। ৫

খ) দেখান যে, একটি প্রকৃত ভেক্টর $\vec{u}(t)$কে সকল সময় একটি নির্দিষ্ট রেখার সাথে সমান্তরাল হতে হলে প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত হবে $\vec{u}\times\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}$. ৫

৪। ক) $\int_C (xy\,\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y)$, সমাকলনটির মান স্টোকস্-এর উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় করুন, যখন C বক্রটি xy তলে একটি বর্গক্ষেত্র যার শীর্ষবিন্দুগুলি (1, 1), (−1, 1), (−1, −1), (1, −1). ৫

খ) একটি বক্ররেখা $\vec{r}=\vec{r}(s)$ (s হল বক্ররেখা বরাবর দৈর্ঘ্য) -এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন $k=\frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$

(k হল বক্রতা এবং $\dot{\vec{r}}$ হল $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, ইত্যাদি) ৫

বিভাগ – খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। এমন একটি ভেক্টর δ নির্ণয় করুন যেটি $\vec{\alpha}=4\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ এবং $\vec{\beta}=\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ প্রত্যেকের উপর লম্ব এবং $\vec{\delta}.\vec{\gamma}=21$, যেখানে $\vec{\gamma}=3\vec{i}+7\vec{j}-4\vec{k}$ হবে। ৬

৬। $f(r)$ অন্তরকলনযোগ্য হলে $\vec{\nabla}\times(\vec{r}\,f(r))$ নির্ণয় করুন, যেখানে $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ এবং $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ।

৬

৭। যদি $\vec{a}=a_1\vec{l}+a_2\vec{m}+a_3\vec{n}$, $\vec{b}=b_1\vec{l}+b_2\vec{m}+b_3\vec{n}$, $\vec{c}=c_1\vec{l}+c_2\vec{m}+c_3\vec{n}$ হয়, যেখানে $\vec{l},\vec{m},\vec{n}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় নয়, তবে দেখান যে,

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}[\vec{l},\vec{m},\vec{n}],$$

এখানে প্রতীক চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থ বহন করে। এটি ধরে নেওয়া যেতে পারে যে ডট ও ক্রসের মধ্যে পরিবর্তনে স্কেলার ত্রিধা গুণফলের মান অপরিবর্তিত থাকে। ৬

৮। একটি স্কেলার স্থানাঙ্ক অপেক্ষকের দিক-অন্তরকলজ কি ? (1, 3, 2) বিন্দুতে $\phi=2zx-y^2$ -এর চরম দিক-অন্তরকলজ নির্ণয় করুন এবং সেটির দিক নির্ণয় করুন। ৬

৯। স্টোকস্-এর উপপাদ্য ব্যবহার করে $\int_C (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z)$ -এর মান নির্ণয় করুন, যখন C বক্রটি $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay=0$, $x+y=2a$ এবং $(2a,0,0)$ বিন্দু থেকে শুরু করে প্রথমে z তলের নিচের দিকে যায়। ৬

১০। যদি $\vec{r} = 3t\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ হয়, তাহলে $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$-এর মান নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ – গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। λ ও μ-এর যে মানের জন্য $-3\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ এবং $\mu\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টর দুটি সমরেখীয় হবে তা নির্ণয় করুন। ৩

১২। $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের উভয়ের সাথে লম্বভাবে অবস্থিত একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করুন। ৩

১৩। মূলবিন্দুগামী ও $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৩

১৪। একটি কণার উপর $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ এই ধ্রুবক বল দুটি ক্রিয়া করে সেটিকে A (1, 3, 2) বিন্দু থেকে B (4, 5, –1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করে। বল দুটির দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন। ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৫। যদি $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ হয়, তবে ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$-এর পরস্পরের মধ্যে সম্পর্ক কি কি প্রকার হতে পারে তা ব্যাখ্যা করুন। ৩

১৬। $\vec{a}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর হলে প্রমাণ করুন যে $\frac{curl\,(\vec{a} \times \vec{r})}{r^3} = \frac{\vec{a}}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{a}.\vec{r})$, $r = |\vec{r}|$. ৩

১৭। $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$

এই আয়তন সমাকলনটির মান নির্ণয় করুন, যেখানে V, $x + y + z = a (a > 0)$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ এদের দ্বারা সীমাবদ্ধ। ৩

১৮। কোন বক্ররেখার সমীকরণ $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ হলে $t = 1$-এ অস্কুলেটিং তলের সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৩

English Version

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Show that the lines joining the vertices to the centroids of opposite faces of a tetrahedron are concurrent (use vector method). 5

   b) Prove, by vector method, the trigonometrical formula $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$, in any triangle *ABC*. 5

2. a) Show, by vector method, that the internal bisector of the angles of a triangle are concurrent. 5

   b) If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ be the position vectors of three points *A, B, C* respectively, show that $\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}$ is perpendicular to the plane *ABC*. What is the geometrical significance of $\frac{1}{2} | \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} |$? 5

3. a) Define curl and divergence of a vector quantity. Find divergence and curl of the vector $\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r}$, where $\hat{r}$ is the unit vector along $\vec{r}$ and r is the magnitude of the vector $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. 5

   b) Show that the necessary and sufficient condition that a real vector $\vec{u}(t)$ always remains parallel to a fixed line is that $\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0}$. 5

4. a) Using Stokes' theorem, find the value of $\int_C (xy\,dx + xy^2 dy)$, where curve C is a square having vertices (1, 1), (–1, 1), (–1, –1) and (1, –1) in the *xy*-plane. 5

   b) For a given curve $\vec{r} = \vec{r}(s)$ (s denotes the length along the curve) prove that $k = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$ (k is the curvature and $\dot{\vec{r}}$ is $\frac{d\vec{r}}{dt}$, etc.) 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Find a vector δ which is perpendicular to both vectors $\vec{\alpha} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ and $\vec{\beta} = \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ and $\vec{\delta} \cdot \vec{\gamma} = 21$, where $\vec{\gamma} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$. 6

6. Find $\vec{\nabla} \times (\vec{r}\, f(r))$ where $f(r)$ is differentiable and $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. 6

7. Show that if $\vec{a} = a_1\vec{l} + a_2\vec{m} + a_3\vec{n}$, $\vec{b} = b_1\vec{l} + b_2\vec{m} + b_3\vec{n}$, $\vec{c} = c_1\vec{l} + c_2\vec{m} + c_3\vec{n}$, where $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ are three non-coplanar vectors, then $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}]$, where symbols have their usual meanings. You can assume that in a scalar triple product dot and cross can be interchanged. 6

8. What is the directional derivative of a scalar point function ? Find the maximum value of the directional derivative of $\phi = 2zx - y^2$ at the point (1, 3, 2) and also the direction in which it occurs. 6

9. Applying Stokes theorem find the value of $\int_C (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$, where C is the curve given by $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0$, $x + y = 2a$ and begins at the point $(2a, 0, 0)$ and goes at first below the z-plane. 6

10. If $\vec{r} = 3t\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$, find the value of $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$. 6

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Determine the values of λ and μ for which the vectors $-3\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ and $\mu\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$ are collinear. 3

12. Find a unit vector which is perpendicular to each of the vectors $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$. 3

13. Find the vector equation of the plane passing through the origin and parallel to both the vectors $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$. 3

14. A particle acted on by constant forces $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ and $3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ is displaced from the point A (1, 3, 2) to the point B (4, 5, –1). Find the work done by the forces. 3

15. If $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, explain all the different possibilities by which the vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ may be related. 3

16. If $\vec{a}$ be a constant vector, then prove that $\frac{curl\,(\vec{a}\times\vec{r})}{r^3}=\frac{\vec{a}}{r^3}-\frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{a}\,.\,\vec{r})$, $r=|\vec{r}|$. 3

17. Evaluate the triple integral
$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$
where V is bounded by $x+y+z=a(a>0)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. 3

18. If the equation of a curve is $x=t$, $y=t^2$, $z=\frac{2}{3}t^3$, then find the equation of the osculating plane at $t=1$. 3

Date of Publication	:	10.10.2014
Last date of Submission of Answer Script by the student	:	30.11.2014
Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before	:	12.01.2015

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

EMT-IV (UA-132) 4

B.Sc.-AU-7116