স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

অনুশীলন পত্র (Assignment) : ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

তৃতীয় পত্র (3rd Paper : **Classical Algebra & Abstract Algebra**)

পূর্ণমান ঃ ৫০ মানের গুরুত্ব ঃ ৩০%

Full Marks : 50 Weightage of Marks : 30%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। ক) a_1, a_2, a_3, a_4 ধনাত্মক সংখ্যা হলে দেখান যে,
$(1+a_1^4)(1+a_2^4)(1+a_3^4)(1+a_4^4) \geq (1+a_1 a_2 a_3 a_4)^4$. ৫

খ) z একটি পরিবর্তনশীল জটিল রাশি এবং $\frac{z-i}{z+i}$-এর অ্যামপ্লিটিউড $\frac{\pi}{4}$ হলে, দেখান যে z জটিল সমতলের একটি বৃত্তে অবস্থান করে। ৫

২। ক) কার্ডনের পদ্ধতিতে সমাধান করুন :
$x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$. ৫

খ) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের বীজগুলি α, β, γ হলে, এমন একটি সমীকরণ গঠন করুন যার বীজগুলি $\alpha\beta + \beta\gamma$, $\beta\gamma + \gamma\alpha$, $\gamma\alpha + \alpha\beta$. ৫

৩। ক) S_3 দলটির উপদলগুলি নির্ণয় করুন। S_3 দলটিতে এমন কোন উপদল থাকবে কি যার সদস্য সংখ্যা হবে 4 ? ৫

খ) $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে দেখান যে
$(\beta\gamma - \alpha\delta)(\gamma\alpha - \beta\delta)(\alpha\beta - \gamma\delta) = r^2 - p^2 s$. ৫

৪। ক) দেখান যে $\{ 1, -1, i, -i \}$ সেটটি গুণন সাপেক্ষে একটি চক্রীয় দল গঠন করে। ঐ দলের জনকগুলি নির্ণয় করুন। ৫

খ) প্রমাণ করুন একটি দল $(G, \bullet)$ আবেলীয় (abelian) দল হবে যদি ও কেবলমাত্র যদি $(a.b)^2 = a^2.b^2$ হয়, $\forall a, b \in G$. ৫

বিভাগ – খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। যে কোন একটি সেট A-এর উপর ρ একটি তুল্যতা সম্পর্ক হলে দেখান যে, তুল্যতা শ্রেণী $[a]\cap[b]=\phi$ অথবা $[a]=[b]$. ৬

৬। যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা b ও c-এর জিসিডি (g.c.d.) g হয় তবে দেখান যে, দুটি পূর্ণসংখ্যা x_0, y_0 পাওয়া যাবে যার জন্য $g=bx_0+cy_0$ হবে। ৬

৭। α যদি $x^n-1=0$ সমীকরণের একটি বিশেষ বীজ হয় এবং p ও n যদি পরস্পর মৌলিক হয় তবে দেখান যে, α^p ও ঐ $x^n-1=0$ সমীকরণের একটি বিশেষ বীজ হবে। ৬

৮। সমাধান করুন :

$$10x^5+25x^4+16x^3+16x^2+25x+10=0.$$ ৬

৯। $\cos z=-2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন। ৬

১০। অঙ্গন (ring)-এর সংজ্ঞা লিখুন ও একটি অসীম অঙ্গনের উদাহরণ দিন। $(z_6,+,\cdot)$ অঙ্গনটিতে শূন্য ভাজকগুলি নির্ণয় করুন। ৩ + ৩

বিভাগ – গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $A=\{1,2,3,4\}, B=\{5,6\}$ হলে $B\times A$ নির্ণয় করুন। ৩

১২। $f:Z\to Z$ চিত্রণটি নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত : $f(x)=x^2+3$। দেখান যে f একৈক (injective) নয়, যেখানে $x\in Z$, Z-সকল পূর্ণসংখ্যার সেট। ৩

১৩। $\sqrt{2}$-কে একটি অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করুন। ৩

১৪। গাণিতিক আরোহ তত্ত্বের সাহায্যে দেখান যে,

$$1+2+3+\ldots+(2n-1)=n^2,\ n\in N.$$ ৩

১৫। যদি একই সঙ্গে $a,\ b$ দ্বারা বিভাজ্য ও $b,\ a$ দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে দেখান যে, $a=\pm b$. ৩

১৬। $a,\ b,\ c$ ধনাত্মক হলে দেখান যে,

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq a+b+c.$$ ৩

১৭। কোন অঙ্গন R-এ, সকল x-এর জন্য $x^2=x$ হলে দেখান যে $x=-x,\ \forall x\in R$ হবে। ৩

১৮। z_4 অথবা z_5-র মধ্যে কোন্‌টি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র ? আপনার মতের সাপেক্ষে যুক্তি দেখান। ৩

English Version

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) If a_1, a_2, a_3, a_4 are positive numbers show that

$$(1+a_1^4)(1+a_2^4)(1+a_3^4)(1+a_4^4) \geq (1+a_1 a_2 a_3 a_4)^4 .$$ 5

b) If z is a variable complex number and the amplitude of $\frac{z-i}{z+i}$ is $\frac{\pi}{4}$, then show that z lies on a circle of complex plane. 5

2. a) Solve by Cardon's method :

$x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$. 5

b) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, construct an equation whose roots are $\alpha\beta + \beta\gamma$, $\beta\gamma + \gamma\alpha$, $\gamma\alpha + \alpha\beta$. 5

3. a) Determine the subgroups of the group S_3. Is there any subgroup of S_3 containing 4 elements ? 5

b) If $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are true roots of the equation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, then prove that $(\beta\gamma - \alpha\delta)(\gamma\alpha - \beta\delta)(\alpha\beta - \gamma\delta) = r^2 - p^2 s$. 5

4. a) Show that the set { 1, –1, i, – i } forms a cyclic group with respect to multiplication. Determine the generators of this group. 5

b) Prove that a group $(G, \bullet)$ will be abelian if and only if $(a.b)^2 = a^2.b^2$, $\forall a, b \in G$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. If ρ is an equivalence relation on a set A, then prove that equivalence classes $[a] \cap [b] = \phi$ or $[a] = [b]$. 6

6. If g is the g.c.d. of two positive integers b and c, then show that $g = bx_0 + cy_0$ for two positive integers x_0, y_0. 6

7. If α is a special root of the equation $x^n - 1 = 0$, p and n are prime to each other, then show that α^p also will be a special root of $x^n - 1 = 0$. 6

8. Solve : $10x^5 + 25x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 25x + 10 = 0$. 6

9. Find general solution of $\cos z = -2$. 6

10. Write down the definition of a ring. Give example of an infinite ring. Find the zero divisors in the ring $(z_6, +, \bullet)$. 3 + 3

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. $A=\{1,2,3,4\}$ and $B=\{5,6\}$ then find $B\times A$. 3

12. The mapping $f: Z \to Z$ is defined in the following way :

    $f(x)=x^2+3$, $\forall x \in Z$, Z is the set of all integers.

    Show that f is not injective. 3

13. Express $\sqrt{2}$ in an infinite continued fraction. 3

14. Apply mathematical induction to show

    $1+2+3+\ldots+(2n-1)=n^2$, $n \in N$. 3

15. If a is divisible by b and b is divisible by a simultaneously then show that $a=\pm b$. 3

16. If a, b, c are positive numbers, then show that

    $$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$ 3

17. If in a ring R, for all x, $x^2=x$ holds then show that $x=-x$, $\forall x \in R$. 3

18. Which one is an Integral Domain among z_4 and z_5 ? Give reason in favour of your opinion. 3

Date of Publication	:	10.10.2014
Last date of Submission of Answer Script by the student	:	30.11.2014
Last date of Submission of marks by the Study Centre to the department of C.O.E. on or before	:	12.01.2015